ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ СЫПУЧИХ СРЕД, ВЫЗВАННЫЕ ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ

Ю. З. Алешков
Санкт-Петербургский государственный университет, Россия
e-mail: gal@mg7371.spb.edu

In natutal conditions contract of mediums with different reology characteristics take place. The current of liquid influences the interface of water—ground, which takes wavy shapes. The parametrs of waves on interface mediums caused by the current of inhomogeneous liquid variable with depth are defined.

1. В природных условиях имеет место контакт сред с различными реологическими свойствами. Характерным сочетанием сред является жидкость—грунт. Дно реки или моря представляет собой слой грунта в виде песка, ила, глины, гравия. В результате воздействия потока жидкости поверхность раздела вода—грунт принимает волнообразные очертания. В частности, на дне реки образуются песчаные волны — рифели, в пустыне ветер формирует различные очертация поверхности песка в виде дюн, барханов.

Рассмотрим двухслойную среду жидкость—грунт. При движении жидкости в результате ее взаимодействия с грунтом частицы донного слоя также приходят в движение. Граница раздела сред деформируется так, что по ней распространяются волны. Слой жидкости от взаимодействия ее с грунтом приходит в возмущенное движение, на его свободной поверхности также образуются волны.

2. Одной из первых работ по определению параметров волн на песчаном дне реки является исследование Экснера (1920), [1].

Расположим ось x вдоль невозмущенной горизонтальной поверхности раздела по течению, ось y направим вертикально вверх. Пусть $y = \eta(x,t)$ — уравнение поверхности раздела в текущий момент времени.

Изменение площади вертикальной полосы донного слоя шириной $\triangle x$ равно $[\eta(x,t+\triangle t) - \eta(x,t)] \triangle x$. Оно вызвано расходом вещества за время $\triangle t$, равным $[Q(x,t) - Q(x+\triangle x,t)] \triangle t$, где Q — расход через вертикальное сечение донного слоя. Таким образом, имеем уравнение

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Для определения расхода Q необходимо знание реологии грунта. В виду трудности решения этого вопроса Экснер принимает гипотезу о линейной зависимости расхода от донной скорости u_b жидкости, $Q = \varkappa u_b$. Для определения донной скорости u_b Экснер рассматривает уравнение постоянства расхода q в водном слое глубины H в виде:

$$(H-\eta)u = q.$$

Здесь u — скорость водного потока. Из этого уравнения следует, что она не зависит от вертикальной координаты, следовательно, $u_b = u$. Тем самым

$$u_b = \frac{q}{H-\eta(x,t)}, \quad \frac{\partial u_b}{\partial x} = \frac{q}{(H-\eta)^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}.$$

Для определения ординаты поверхности раздела имеем уравнение

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + c(\eta)\frac{\partial\eta}{\partial x} = 0, \quad c(\eta) = \frac{\kappa q}{(H-\eta)^2}.$$

М. А. Великанов обобщает гипотезу Экснера, полагая $Q = Q(u_b)$, [1].

Квазилинейное уравнение первого порядка для $\eta = \eta(x,t)$ имеет решение $\eta = f\big(x - c(\eta)t\big)$, где f — произвольная функция, представимая в виде неявной функции.

3. Ф. И. Франкль [2] рассмотрел эту же задачу с более полным учетом гидродинамики водного слоя, считая, однако, что невозмущенная скорость потока U постоянна. Пусть (u,v) — скорость жидкости в точке (x,y) в момент времени t. Запишем кинематическое условие на поверхности раздела

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + u\frac{\partial\eta}{\partial x} = v, \quad y = \eta(x,t).$$

Кинематическое и динамическое условия на свободной поверхности $y = H + \eta_w(x,t)$ имеют вид:

$$\frac{\partial \eta_w}{\partial t} + u\frac{\partial \eta_w}{\partial x} = v, \quad p = p_0,$$

где $p = p(x,y,t)$ — давление в жидкости; p_0 — атмосферное давление.

Ф. И. Франкль принимает движение слоя жидкости потенциальным, $(u,v) = \nabla\varphi$, где $\varphi = \varphi(x,y,t)$ — потенциал скорости. В этом случае имеет место интеграл Лагранжа—Коши:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + \frac{p}{\rho} + gy = f(t),$$

где ρ — плотность жидкости; g — ускорение свободного падения; $f(t)$ — произвольная функция времени.

Рассмотриваются малые возмущения режима движения

$$u = U, \quad v = 0, \quad \eta = 0, \quad \eta_w = 0.$$

Полагаем $u = U + u'$, затем линеаризуем условия задачи. Сначала имеем

$$\frac{\partial'\eta}{\partial t} = v, \quad y = 0; \quad \frac{\partial'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}.$$

Далее исходим из зависимости $Q = Q(u_b)$, $u_b = U + u'(x,\eta,t)$. В случае малых возмущений

$$Q = Q(U) + \kappa u'(x,0,t), \quad \kappa = Q'(U).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial'\eta}{\partial t} - U\frac{\partial \eta}{\partial x} + \kappa\frac{\partial u'}{\partial x} = 0, \quad y = 0.$$

Из полученных двух соотношений при $y = 0$ исключим η:

$$\kappa\frac{\partial'}{\partial t}\,\frac{\partial u'}{\partial x} + \left(\frac{\partial'}{\partial t} - U\frac{\partial}{\partial x}\right)v = 0, \quad y = 0.$$

Кинематическое условие на свободной поверхности записываем в виде

$$\frac{\partial'\eta_w}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad y = H.$$

Для линеаризации динамического условия полагаем $\varphi = Ux + \varphi'$. Затем получаем

$$\eta_w = -\frac{1}{g}\frac{\partial'}{\partial t}\varphi' \underset{y=H}{\rightarrow} \Big|.$$

Исключая η_w, имеем условие

$$\frac{\partial'^2}{\partial t^2}\varphi' + g\frac{\partial \varphi'}{\partial y} = 0, \quad y = H.$$

Таким образом, потенциал скорости φ' удовлетворяет уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2} = 0$, а также граничным условиям при $y = 0$ и $y = H$.

Требуется найти решение, отвечающее периодическим волнам. Полагаем

$$\varphi' = \varphi'(\xi,\eta), \quad \xi = k(x_1 - c_1 t), \quad \eta = ky, \quad x_1 = x - Ut,$$

где k — волновое число; c_1 — фазовая скорость волны относительно потока.

В силу уравнения Лапласа

$$\varphi' = k^{-1}\left(Ae^{-\eta} + Be^{\eta}\right)\sin\xi.$$

Соотношение между A, B, а также зависимость $c_1 = c_1(k)$ определяются из граничных условий.

При $H = \infty$ имеем $u' = v = 0$, $y = \infty$. Поэтому $B = 0$. Из условия при $y = 0$ получаем выражение $c_1 = -\dfrac{1}{1+\kappa k}U$. Для фазовой скорости волны относительно неподвижной системы координат имеем $c = U + c_1$.

В случае $H \neq \infty$ граничные условия записываются в виде

$$\big[U + (1+\kappa k)c_1\big]A - \big[U + (1-\kappa k)c_1\big]B = 0,$$
$$e^{\eta_1}(kc_1^2 + g)A + e^{\eta_1}(kc_1^2 - g)B = 0, \quad \eta_1 = kH.$$

Ненулевое решение этой системы существует для значений c_1, определяемых из уравнения

$$k(\operatorname{ch}\eta_1 + \kappa\operatorname{sh}\eta_1)c_1^3 + kU\operatorname{ch}\eta_1\, c_1^2 - g(\operatorname{sh}\eta_1 + \kappa k\operatorname{ch}\eta_1)c_1 - gU\operatorname{sh}\eta_1 = 0.$$

4. В реальных условиях скорость течения изменяется с глубиной погружения, а возмущенное движение жидкости может быть отличным от потенциального. Рассмотрим движение верхнего слоя, представляющего собой идеальную несжимаемую неоднородную жидкость. Пусть ось x направлена вдоль невозмущенной свободной поверхности, ось y вертикально вверх. Обозначим ординату свободной поверхности $y = \eta(x,t)$, ординату поверхности раздела $y = -H(x,t)$. Поверхность раздела в невозмущенном состоянии $y = -H_0$, ее отклонение $\eta_1(x,t) = H_0 - H(x,t)$.

Уравнения движения идеальной несжимаемой неоднородной жидкости имеют вид [3]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + v_x\frac{\partial\rho}{\partial x} + v_y\frac{\partial\rho}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$
$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x},$$
$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Здесь обозначено: ρ — плотность; p — давление; v_x, v_y — компоненты скорости.

На свободной поверхности имеют место кинематическое и динамическое условия

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + v_x\frac{\partial\eta}{\partial x} = v_y, \quad p = p_0(x,t), \quad y = \eta(x,t),$$

где p_0 — давление, приложенное к свободной поверхности.

Условия на поверхности раздела $y = -H(x,t)$ записываем в виде

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial t} + v_x\frac{\partial\eta_1}{\partial x} = v_y, \quad \frac{\partial\eta_1}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,$$

где $Q = Q(v_x^b)$, $v_x^b = v_x(x,-H,t)$.

Уравнения движения с учетом условий на поверхности имеют решение

$$\rho = \widetilde{\rho}(y),\ p = \widetilde{p}(y),\ v_x = u(y),\ v_y = 0,\ \eta = 0,\ \eta_1 = 0;\ g\widetilde{\rho} + \frac{\partial\widetilde{p}}{\partial y} = 0.$$

Здесь $\widetilde{\rho}(y), u(y)$ — произвольно заданные функции.

Движение жидкости представим в виде

$$\rho = \widetilde{\rho} + \rho',\ v_x = u + v_x',\ v_y = v_y',\ p = \widetilde{p} + p',\ \eta = \eta',\ \eta_1 = \eta_1',$$

где индекс "штрих" характеризует возмущенное движение.

Далее рассматриваем соответствующую линейную задачу.

Уравнения возмущенного движения

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + u\frac{\partial\rho'}{\partial x} + v_y\frac{\partial\widetilde{\rho}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_x'}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$
$$\widetilde{\rho}\left(\frac{\partial v_x'}{\partial t} + u\frac{\partial v_x'}{\partial x} + \frac{du}{dy}v_y\right) = -\frac{\partial p'}{\partial x},$$
$$\widetilde{\rho}\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + u\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) = -g\rho' - \frac{\partial p'}{\partial y}.$$

Граничные условия для описания возмущенного движения при $p_0 = \mathrm{const}$:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + u\frac{\partial\eta}{\partial x} = v_y, \quad -g\widetilde{\rho}\eta + p' = 0, \quad y = 0,$$
$$\frac{\partial\eta_1}{\partial t} + u\frac{\partial\eta_1}{\partial x} = v_y, \quad y = -H_0.$$

Кроме того, так как

$$v_x^b = u(-H_0) + b\eta_1 + v_x'(x, -H_0, t), \quad b = \frac{du}{dy}\underset{y=-H_0}{\rightarrow}\Big|,$$
$$Q = Q_1 + \kappa\big[b\eta_1 + v_x'(x, -H_0, t)\big], \ Q_1 = Q\big(u(-H_1)\big), \ \kappa = Q'\big(u(-H_0)\big).$$

Далее рассмотрим решение в виде бегущей волны с частотой ω и волновым числом k:

$$\big\{\rho', p', v_x', v_y, \eta, \eta_1\big\} = \big\{R(y), P(y), V_x(y), V_y(y), A, B\big\}e^{i(kx-\omega t)}.$$

Для определения соответствующих амплитуд имеем уравнения

$$(ku-\omega)iR + \widetilde{\rho}'V_y = 0, \quad ikV_x + V_y' = 0,$$
$$\widetilde{\rho}\big[(ku-\omega)iV_x + u'V_y\big] = -ikP,$$
$$\widetilde{\rho}(ku-\omega)iV_y = -gR - P',$$

причем здесь штрих означает производную по y.

Граничные условия

$$(ku-\omega)iA = V_y, \quad P = g\widetilde{\rho}A, \quad y = 0,$$
$$(ku-\omega)iB = V_y, \quad (\kappa bk - \omega)B + \kappa kV_x = 0, \quad y = -H_0.$$

Составим уравнение для $W = V_y$:

$$(ku-\omega)^2(w'' - 2\alpha w') - \big[k^2(ku-\omega)^2 + k(ku-\omega)(u'' - 2\alpha u') - k^2N^2\big]w = 0,$$

где $N^2 = -\dfrac{g\widetilde{\rho}'}{\widetilde{\rho}}$, $2\alpha = \dfrac{1}{g}N^2$.

Граничные условия для определения w:

$$w' = \left[\frac{ku'}{ku-\omega} + \frac{gk^2}{(ku-\omega)^2}\right]w, \quad y = 0,$$
$$w' = \frac{\kappa bk - \omega}{\kappa(ku-\omega)}w, \quad y = -H_0.$$

В результате замены искомой функции по формуле

$$w = V(y)\exp\left\{\int_0^y \alpha(y)\ dy\right\}$$

уравнение для $V = V(y)$ примет вид

$$V'' + q(y)V = 0,$$
$$q(y) = \alpha' - \alpha^2 - k^2 - k\frac{u'' - 2\alpha u'}{ku-\omega} + \frac{2gk^2}{(ku-\omega)^2}\alpha.$$

Граничными условиями для определения $V(y)$ являются

$$V'(0) = \gamma_1 V(0), \quad V'(-H_0) = \gamma_2 V(-H_0),$$
$$\gamma_1 = \left\{\frac{ku'}{ku-\omega} + \frac{gk^2}{(ku-\omega)^2} - \alpha\right\}\underset{y=0}{\rightarrow}\Big|, \ \gamma_2 = \left\{\frac{\kappa bk - \omega}{\kappa(ku-\omega)} - \alpha\right\}\underset{y=-H_0}{\rightarrow}\Big|.$$

При $q = \mathrm{const}$ имеем
$$V = C_1 e^{\sqrt{q}y} + C_2 e^{-\sqrt{q}y}.$$
Удовлетворяя граничным условиям, получим уравнения для C_1, C_2:
$$(\sqrt{q} - \gamma_1)C_1 - (\sqrt{q} + \gamma_1)C_2 = 0,$$
$$(\sqrt{q} - \gamma_2)e^{-\sqrt{q}H_0}C_1 - (\sqrt{q} + \gamma_2)e^{\sqrt{q}H_0}C_2 = 0.$$
Отсюда имеем связь между C_1, C_2, а также зависимость $\omega = \omega(k)$.

В случае $q = q(y)$ построим решения $V_1(y)$, $V_2(y)$ с учетом начальных условий
$$V_1(0) = 1, \quad V_1'(0) = 0;$$
$$V_2(0) = 0, \quad V_2'(0) = 1.$$
Общее решение для $V = V(y)$ будет иметь вид
$$V = C_1 V_1(y) + C_2 V_2(y).$$
Удовлетворяя краевым условиям, получим
$$\gamma_1 C_1 - C_2 = 0,$$
$$\big[V_1'(-H_0) + \gamma_2 V_1(-H_0)\big]C_1 + \big[V_2'(-H_0) - \gamma_2 V_2(-H_0)\big]C_2 = 0.$$
Из условия равенства нулю определителя этой системы получаем уравнения для нахождения зависимости $\omega = \omega(k)$.

5. Развитие моделей взаимодействия двух слоев различных сред может служить следующая задача о внутренних волнах [3]. Рассмотрим два соприкасающихся слоя идеальной неоднородной стратифицированной жидкости. Пусть верхнему слою соответствует индекс $j = 0$, а нижнему $j = 1$. Имеем краевую задачу
$$\frac{d\rho_j}{dt} = 0, \quad \operatorname{div} \overline{v}_j = 0,$$
$$\rho_j \frac{d\overline{v}_j}{dt} = \rho_j \overline{g} - \nabla p_j, \quad \overline{g} = (0, -g), \quad j = 0, 1;$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + v_{0x}\frac{\partial \eta}{\partial x} = v_{0y}, \quad p_0 = \mathrm{const}, \quad y = \eta(x,t);$$
$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} + v_{jx}\frac{\partial \eta_1}{\partial x} = v_{jy}, \quad p_0 = p_1, \quad y = -H_0 + \eta_1;$$
$$v_{1y} = 0, \quad y = -H_1, \quad H_1 = H_0 + d,$$
где d — глубина нижнего слоя.

Эта задача имеет решение
$$\rho_j = \widetilde{\rho}_j(y),\ p_j = \widetilde{p}_j(y), \quad \overline{v}_j = (u_j(y), 0) = \overline{u}_j,$$
$$\eta = 0,\ \eta_1 = 0, \quad g\widetilde{\rho}_j + \frac{\partial \widetilde{p}_j}{\partial y} = 0,$$
где $\widetilde{\rho}_j(y), u_j(y)$ — произвольно заданные функции.

Движение жидкости представим в виде
$$\rho_j = \widetilde{\rho}_j + \rho_j',\ \overline{v}_j = \overline{u}_j + \overline{v}_j',\ p_j = \widetilde{p}_j + p_j',\ \eta = \eta',\ \eta_1 = \eta_1'.$$
Далее рассматриваем линейную задачу
$$\frac{\partial \rho_j'}{\partial t} + u_j\frac{\partial \rho_j'}{\partial x} + v_{jy}\frac{\partial \widetilde{\rho}_j}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_{jx}'}{\partial x} + \frac{\partial v_{jy}}{\partial y} = 0, \quad j = 0, 1,$$
$$\widetilde{\rho}_j\left(\frac{\partial v_{jx}'}{\partial t} + u_j\frac{\partial v_x'}{\partial x} + \frac{du_j}{dy}v_{jy}\right) = -\frac{\partial p_j'}{\partial x},$$
$$\widetilde{\rho}_j\left(\frac{\partial v_{jy}}{\partial t} + u_j\frac{\partial v_{jy}}{\partial x}\right) = -g\rho_j' - \frac{\partial p_j'}{\partial y}.$$

Граничные условия для определения возмущенного движения:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+u_0\frac{\partial\eta}{\partial x}=v_{0y},\quad p_0'=g\widetilde{\rho}_0\eta,\quad y=0.$$

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial t}+u_j\frac{\partial\eta_1}{\partial x}=v_{jy},\quad g(\widetilde{\rho}_1-\widetilde{\rho}_0)\eta_1+p_0'-p_1'=0,\quad y=-H_0.$$

$$v_{1y}=0,\quad y=-H_1.$$

Решение ищем в виде

$$\{\rho_j',p_j',v_{jx}',v_{jy},\eta,\eta_1\}=\{R_j(y),P_j(y),V_{jx}(y),V_{jy}(y),A,B\}e^{i(kx-\omega t)}.$$

Для соответствующих амплитуд получаем уравнения

$$(ku_j-\omega)iR_j+\widetilde{\rho}_j'V_{jy}=0,\quad ikV_{jx}+V_{jy}'=0,$$

$$\widetilde{\rho}_j\left[(ku_j-\omega)iV_{jx}+u_j'V_{jy}\right]=-ikP_j,$$

$$\widetilde{\rho}_j(ku_j-\omega)iV_{jy}=-gR_j-P_j'.$$

Граничные условия:

$$(ku_0-\omega)iA=V_{0y},\quad P_0=g\widetilde{\rho}_0A,\quad y=0,$$

$$(ku_j-\omega)iB=V_{jy},\quad g(\widetilde{\rho}_1-\widetilde{\rho}_0)B+P_0-P_1=0,\quad y=-H_0,$$

$$V_{1y}=0,\quad y=-H_1.$$

Для функций $w_j=V_{jy}$, $j=0,1$, имеем уравнения

$$(ku_j-\omega)^2(w_j''-2\alpha_jw_j')-\,-\left[k^2(ku_j-\omega)^2+k(ku_j-\omega)(u_j''-2\alpha_ju_j')-k^2N_j^2\right]w_j=0,$$

$$N_j^2=-\frac{g\widetilde{\rho}_j'}{\widetilde{\rho}_j},\quad 2\alpha_j=\frac{1}{g}N_j^2.$$

Граничные условия:

$$w_0'=\left[\frac{ku_0'}{ku_0-\omega}+\frac{gk^2}{(ku_0-\omega)^2}\right]w_0,\ y=0;\quad w_1(-H_1)=0.$$

$$(ku_j-\omega)iB=w_j,\quad w_0=\frac{ku_0-\omega}{ku_1-\omega}w_1,\quad y=-H_0.$$

$$\left[\widetilde{\rho}_0u_0'+\frac{gk}{ku_0-\omega}(\widetilde{\rho}_0-\widetilde{\rho}_1)\right]w_0-\frac{\widetilde{\rho}_0}{k}(ku_0-\omega)w_0'=\widetilde{\rho}_1u_1'w_1-\frac{\widetilde{\rho}_1}{k}(ku_1-\omega)w_1',\quad y=-H_0.$$

В результате замены $w_j=V_j(y)\exp\left\{\int_0^y\alpha_j(y)dy\right\}$ уравнение для $V_j=V_j(y)$, $j=0,1$, примет вид

$$V_j''+q_j(y)V_j=0,$$

$$q_j=\alpha_j'-\alpha_j^2-k^2-k\frac{u_j''-2\alpha_ju_j'}{ku_j-\omega}+\frac{2gk^2}{(ku_j-\omega)^2}\alpha_j.$$

Граничные условия

$$V_0'=\beta_1V_0,\quad y=0;\quad V_1(-H_1)=0,$$

$$V_0=\beta_2V_1;\quad \delta_1V_0+\delta_2V_0'=\delta_3V_1+\delta_4V_1',\quad y=-H_0,$$

где обозначено

$$\beta_1=\frac{ku_0'}{ku_0-\omega}+\frac{gk^2}{(ku_0-\omega)^2}-\alpha_0,\quad \beta_2=\frac{ku_0-\omega}{ku_1-\omega},$$

$$\delta_1=\widetilde{\rho}_0u_0'+\frac{gk}{ku_0-\omega}(\widetilde{\rho}_0-\widetilde{\rho}_1)-\frac{\widetilde{\rho}_0}{k}(ku_0-\omega)\alpha_0,$$

$$\delta_2=-\frac{\widetilde{\rho}_0}{k}(ku_0-\omega),$$

$$\delta_3=\widetilde{\rho}_1u_1'-\frac{\widetilde{\rho}_1}{k}(ku_1-\omega)\alpha_1,\quad \delta_4=-\frac{\widetilde{\rho}_1}{k}(ku_1-\omega).$$

Рассмотрим решение V_{j1}, V_{j2} с начальными данными

$$V_{j1}(0) = 1, \quad V'_{j1}(0) = 0,$$
$$V_{j2}(0) = 0, \quad V'_{j2}(0) = 1.$$

Тогда общее решение

$$V_j = C_j V_{j1} + D_j V_{j2}.$$

Удовлетворяя граничным условиям, получим систему уравнений для определения C_j, D_j, $\omega(k)$:

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (C_0, D_0, C_1, D_1),$$

$$a_{11} = \left(V'_{01} - \beta_1 V_{01}\right) \underset{y=0}{\rightarrow} \Big|, \quad a_{12} = \left(V'_{02} - \beta_1 V_{02}\right) \underset{y=0}{\rightarrow} \Big|, \quad a_{13} = a_{14} = 0,$$

$$a_{21} = V_{01}(-H_0),\ a_{22} = V_{02}(-H_0),$$
$$a_{23} = -\beta_2(-H_0)V_{11}(-H_0),\ a_{24} = -\beta_2(-H_0)V_{12}(-H_0),$$

$$a_{31} = \left(\delta_1 V_{01} + \delta_2 V'_{01}\right) \underset{y=-H_0}{\rightarrow} \Big|, \quad a_{32} = \left(\delta_1 V_{02} + \delta_2 V'_{02}\right) \underset{y=-H_0}{\rightarrow} \Big|,$$

$$a_{33} = -\left(\delta_3 V_{11} + \delta_4 V'_{11}\right) \underset{y=-H_0}{\rightarrow} \Big|, \quad a_{34} = -\left(\delta_3 V_{12} + \delta_4 V'_{12}\right) \underset{y=-H_0}{\rightarrow} \Big|,$$

$$a_{41} = a_{42} = 0, \quad a_{43} = V_1(-H_1), \quad a_{44} = V_{12}(-H_1).$$

Равенство нулю определителя этой системы определяет зависимость $\omega = \omega(k)$.

Список литературы

[1] Великанов М. А. Динамика русловых потоков. Л. 1949.

[2] Франкль Ф. И. О движении песчаных волн. ДАН СССР. 1953. Т. 89, №1. С. 29–32.

[3] Алешков Ю. З. Течение и волны в океане. СПб. 1996.