МЕТОД ЭКВИРАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ СЕТОК

Г. С. Хакимзянов, Н. Ю. Шокина
Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: khak@ict.nsc.ru, shokin@ict.nsc.ru

In numerical solution of computational hydrodynamics problems the application of adaptive grids allows to receive minimum error of a numerical solution at the given amount of nodes. The equidistribution method for constructing three-dimensional motionless regular grids is considered in the present report. The grids are adapted as to the curvilinear boundaries of the domain as to the a priori given control function.

In three-dimensional case the equidistribution principle consists in the requirement of the constancy of the product of the mesh volume by the value of a priori given control function at the mesh. Using the general methodology, which is based on the equdistribution principle, the non-linear equations of elliptic type for the definition of the node coordinates inside the domain and on its boundaries are obtained.

В настоящее время численные методы являются эффективным средством решения большого числа практических задач механики сплошных сред. Очевидно, что точность решения задач о течениях жидкости и газа будет во многом зависеть от качества построенной сетки. Поскольку характеристики течения могут сильно изменяться в одних частях области и практически не меняться в других, то желательно строить сетку так, чтобы она была более плотной в первом случае и более разреженной во втором. Кроме того, важными ограничивающими факторами являются затраты памяти и время работы компьютера.

Сетка, которая строится с учетом особенностей поставленной задачи, называется адаптивной. Идея эквираспределения для построения адаптивных сеток была впервые изложена в работе [1] для одномерного случая. В дальнейшем при построении сеток в двумерном [2]–[4] и трехмерном случаях [5, 6] принцип эквираспределения использовался отдельно в каждом координатном направлении, то есть для построения многомерной сетки несколько раз применялся одномерный принцип эквираспределения.

В настоящей работе на основе единой методологии сформулирован многомерный принцип эквираспределения и выведены уравнения метода эквираспределения для сеток, покрывающих многообразия в двумерном и трехмерном пространствах.

Приведены примеры трехмерных адаптивных сеток, построенных методом эквираспределения.

1. Одномерный метод эквираспределения

В работе [1] описывается метод эквираспределения для построения одномерных адаптивных сеток, покрывающих отрезок $[0;\ L]$:

$$x_j \in [0;\ L], \quad j = 1, \ldots, N, \quad x_0 = 0,\ x_N = L.$$

Суть метода эквираспределения заключается в том, чтобы при конструировании сетки добиться постоянства произведения длины ячейки на значение управляющей функции w в центре ячейки:

$$w(x_{j+1/2})S_{j+1/2} = \tilde{C}_h = \text{const}, \quad j = 1, \ldots, N-1. \tag{1.1}$$

Таким образом, длины ячеек будут малы там, где w принимает большие значения и, наоборот, узлы сетки будут иметь разрежения в той части $\Omega = (0;\ L)$, в которой функция w принимает малые значения. Предполагается, что управляющая функция удовлетворяет следующим ограничениям:

$$1 \le w(x) \le W, \quad W = \text{const} < \infty, \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{1.2}$$

Принцип эквираспределения (1.1) является разностным аналогом дифференциального уравнения

$$w(x)\frac{dx}{dq}(q) = C, \quad C = \text{const}, \quad q \in Q = (0;\ 1), \tag{1.3}$$

где

$$x = x(q), \quad q \in \bar{Q}, \tag{1.4}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97–01–00819.

есть искомое взаимно-однозначное отображение $\bar{Q}$ на $\bar{\Omega}$. Уравнение (1.3) будем называть принципом эквираспределения в дифференциальной форме.

На практике при вычислении координат узлов используется аппроксимация следствия уравнения (1.3), получающегося его дифференцированием:

$$ED1: \qquad \frac{d}{dq}\left(w(x)\frac{dx}{dq}\right)(q) = 0. \tag{1.5}$$

Полученное уравнение называют уравнением метода эквираспределения в дифференциальной форме или ED1-уравнением в дифференциальной форме. Его разностный аналог

$$ED1: \qquad \frac{1}{h}\left[w(x_{j+1/2})\frac{x_{j+1}-x_j}{h} - w(x_{j-1/2})\frac{x_j - x_{j-1}}{h}\right] = 0, \quad j = 2,\dots,N-1, \tag{1.6}$$

будем называть ED1-уравнением в разностной форме.

Далее вместо (1.1) и (1.3) будем использовать соотношения, в которые входит якобиан отображения (1.4). Обозначим его через J, $J(q) = \dfrac{dx}{dq}(q)$. Тогда принцип эквираспределения (1.3) примет вид:

$$w(x(q))J(q) = C, \quad C = \mathrm{const}, \quad q \in Q. \tag{1.7}$$

Если якобиан J в центре ячейки аппроксимировать центральной разностью

$$J_{j+1/2} = \frac{x_{j+1}-x_j}{h}, \tag{1.8}$$

то из (1.7) будет следовать разностный аналог (1.1) принципа эквираспределения, который можно теперь записать так:

$$w(x_{j+1/2})J_{j+1/2} = C_h = \mathrm{const}, \quad j = 1,\dots,N-1. \tag{1.9}$$

В одномерном случае принцип эквираспределения и ED1-уравнение эквивалентны в том смысле, что если отображение (1.4) удовлетворяет принципу эквираспределения (1.7), то функция $x = x(q)$ будет и решением ED1-уравнения (1.5) и наоборот, любое решение ED1-уравнения (1.5) удовлетворяет принципу эквираспределения (1.7). Эквивалентность имеет место и на разностном уровне: если координаты узлов сетки удовлетворяют принципу эквираспределения (1.9), то сеточная функция x_j является решением разностных ED1-уравнений (1.6) и наоборот, решение этих уравнений дает сетку, удовлетворяющую принципу эквираспределения (1.9).

2. Двумерный метод эквираспределения

В двумерном случае аналогом длины одномерной ячейки является площадь ячейки двумерной сетки:

$$\mathbf{x}_j = (x_j^1, x_j^2) \in \Omega, \quad j = (j_1, j_2), \quad j_\alpha = 1,\dots,N_\alpha, \quad \alpha = 1,2.$$

Тогда принцип эквираспределения, аналогичный (1.1), будет выглядеть так:

$$w(\mathbf{x}_{j+1/2})S_{j+1/2} = \tilde{C}_h, \quad j_\alpha = 1,\dots,N_\alpha - 1,, \quad \alpha = 1,2, \tag{2.1}$$

где $w(\mathbf{x}_{j+1/2})$ — значение заданной управляющей функции в центре ячейки.

Будем считать, что сетка в Ω является образом равномерной прямоугольной сетки, покрывающей единичный квадрат Q, при взаимно-однозначном отображении

$$x^\alpha = x^\alpha(q^1, q^2), \quad \alpha = 1,2. \tag{2.2}$$

Возьмем тождество, которому удовлетворяет произвольное гладкое отображение (2.2):

$$\frac{\partial}{\partial q^1}\left(\frac{g_{22}}{J}\frac{\partial x^\alpha}{\partial q^1} - \frac{g_{12}}{J}\frac{\partial x^\alpha}{\partial q^2}\right) + \frac{\partial}{\partial q^2}\left(-\frac{g_{12}}{J}\frac{\partial x^\alpha}{\partial q^1} + \frac{g_{11}}{J}\frac{\partial x^\alpha}{\partial q^2}\right) = 0, \quad \alpha = 1,2. \tag{2.3}$$

Это тождество представляет собой уравнение Лапласа относительно неизвестных функций x^α, записанное в новых координатах q^α. Ковариантные компоненты метрического тензора искомого преобразования (2.2), входящие в рассматриваемое тождество, обозначены через $g_{\alpha\beta}$.

Чтобы сузить множество функций, удовлетворяющих тождеству (2.3), введем дополнительные ограничения на эти функции. Во-первых, будем предполагать, что система координат, определяемая искомым отображением (2.2), является ортогональной:

$$g_{12} = 0. \tag{2.4}$$

И, во-вторых, будем считать, что отображение (2.2), удовлетворяет принципу эквираспределения в дифференциальной форме, аналогичному принципу (1.7) в одномерном случае:

$$w(\mathbf{x}(\mathbf{q}))J(\mathbf{q}) = C, \quad C = \text{const}, \quad \mathbf{q} = (q^1, q^2) \in Q, \tag{2.5}$$

где J — якобиан отображения (2.2). Использование этих условий в тождестве (2.3) приводит к двумерным уравнениям метода эквираспределения или к ED2-уравнениям в дифференциальной форме:

$$ED2: \qquad \frac{\partial}{\partial q^1}\left(wg_{22}\frac{\partial x^\alpha}{\partial q^1}\right) + \frac{\partial}{\partial q^2}\left(wg_{11}\frac{\partial x^\alpha}{\partial q^2}\right) = 0, \quad \alpha = 1, 2. \tag{2.6}$$

Итак, в двумерном случае ED2-уравнения следуют из принципа эквираспределения (2.5) при дополнительном предположении об ортогональности отображения (2.2). Верно и обратное утверждение о выполнении принципа эквираспределения для решений уравнений (2.6), удовлетворяющих некоторым дополнительным ограничениям.

Лемма 2.1. *Если отображение (2.2), задаваемое решениями уравнений (2.6), является невырожденным и ортогональным, то для него выполняется принцип эквираспределения (2.5).*

Покажем, как следует аппроксимировать уравнение (2.6), чтобы указанное в лемме свойство выполнялось и на разностном уровне. Покроем единичный квадрат $\bar{Q}$ равномерной прямоугольной сеткой.

Введем два базисных оператора разностных производных:

$$(D_{q^1}\varphi)(\mathbf{q}) = \frac{\varphi(q^1 + h_1/2, q^2) - \varphi(q^1 - h_1/2, q^2)}{h_1}, \tag{2.7}$$

$$(D_{q^2}\varphi)(\mathbf{q}) = \frac{\varphi(q^1, q^2 + h_2/2) - \varphi(q^1, q^2 - h_2/2)}{h_2}. \tag{2.8}$$

При использовании этих производных для записи разностных операторов необходимо учитывать область определения сеточных функций, так как в некоторых случаях сеточные функции будут относиться не к узлам сетки с целыми индексами , а, например, к центрам ячеек или к центрам сторон ячеек.

Разностные уравнения для координат узлов получаются интегро-интерполяционным методом. Для этого уравнения (2.6) заменяются интегральными соотношениями:

$$\oint\limits_{\mathcal{C}} wg_{22}\frac{\partial x^\alpha}{\partial q^1}dq^2 - wg_{11}\frac{\partial x^\alpha}{\partial q^2}dq^1 = 0, \quad \alpha = 1, 2, \tag{2.9}$$

где $\mathcal{C}$ — контур прямоугольника, стороны которого параллельны осям Oq^α и делят пополам расстояния от рассматриваемого внутреннего узла $\mathbf{q}_j$ до соседних с ним узлов. Интегралы по сторонам этого контура будем аппроксимировать по формуле трапеций, предполагая, что сеточные функции x^α определены в целых узлах $\mathbf{q}_j$, а функция w, компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ и якобиан определены в центрах ячеек.

В результате получаются следующие разностные ED2-уравнения:

$$ED2: \qquad \left(D_{q^1}(wg_{22}D_{q^1}x^\alpha) + D_{q^2}(wg_{11}D_{q^2}x^\alpha)\right)_j = 0, \quad \alpha = 1, 2, \tag{2.10}$$

при этом следует учитывать, что сеточные комплексы $wg_{\beta\beta}D_{q^{3-\beta}}x^\alpha$, α, $\beta = 1, 2$, определены также в центрах ячеек.

Разностные уравнения (2.10) являются нелинейными и девятиточечными. В итерационном процессе решения полученных систем будем брать коэффициенты разностных уравнений с предыдущей итерации. Тогда матрица из этих коэффициентов будет симметричной и, иметь диагональное преобладание.

Отметим, что если якобиан отображения вычисляется по следующей формуле:

$$J_{j+1/2} = \left(D_{q^1}x^1 D_{q^2}x^2 - D_{q^2}x^1 D_{q^1}x^2\right)_{j+1/2}, \tag{2.11}$$

то

$$S_{j+1/2} = J_{j+1/2} h_1 h_2, \tag{2.12}$$

поэтому принцип эквираспределения в разностной форме (2.1) можно переписать в виде, аналогичном (1.9):

$$w(\mathbf{x}_{j+1/2}) J_{j+1/2} = C_h = \mathrm{const}, \quad j_\alpha = 1, \ldots, N_\alpha - 1. \tag{2.13}$$

Сетку с выпуклыми ячейками будем называть квазиортогональной, если средние линии каждой четырехугольной ячейки перпендикулярны. С учетом аппроксимации (2.11) условие квазиортогональности сетки можно записать в виде (2.4):

$$(g_{12})_{j+1/2} = 0. \tag{2.14}$$

Сетку с выпуклыми ячейками будем называть адаптивной, если для каждой ячейки выполняется принцип эквираспределения в разностной форме (2.13).

Выше было указано, что для ортогональных двумерных отображений (2.2) принцип эквираспределения в дифференциальной форме (2.5) и ED2-уравнения (2.6) эквивалентны. На разностном уровне удается доказать, что сеточные функции, определяющие криволинейную сетку, удовлетворяющую принципу эквираспределения в разностной форме (2.13), являются решениями разностных ED2-уравнений (2.10).

Лемма 2.2. *Координаты узлов любой квазиортогональной адаптивной сетки с выпуклыми ячейками удовлетворяют уравнениям (2.10).*

При построении сетки необходимы граничные условия. Расчеты показывают, что результат может оказаться неудовлетворительным из-за сильной скошенности сетки (неортогональности координатных линий) около границы. Причина этого кроется в том, что внутри области положение узлов определяется разностными уравнениями (2.10) и управляющей функцией w, а на границе узлы задаются из других соображений, и эта расстановка может оказаться неудачной.

Поэтому мы используем метод определения узлов на границе, в котором вместе с двумерным методом эквираспределения внутри области используется одномерный метод эквираспределения на границе.

3. Трехмерный метод эквираспределения

Теперь рассмотрим принцип и уравнения метода эквираспределения для построения сетки внутри трехмерной односвязной области Ω с неподвижной границей Γ. Пусть

$$x^\alpha = x^\alpha(q^1, q^2, q^3), \quad \alpha = 1, 2, 3, \tag{3.1}$$

есть взаимно-однозначное, невырожденное, достаточно гладкое отображение единичного куба Q на область Ω (рис. 1).

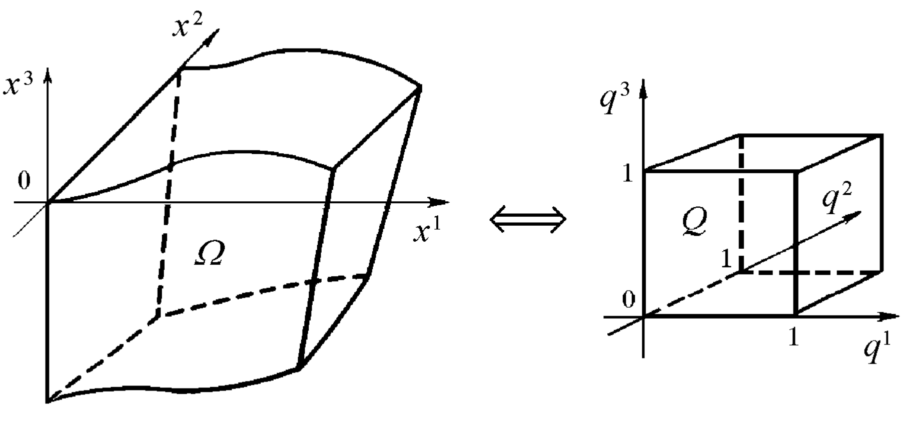

Рис. 1. Физическая область Ω и вычислительная область Q.

Для произвольного такого отображения выполняется тождество, аналогичное (2.3) и вытекающее из записи уравнения Лапласа в новых координатах q^β:

$$\frac{\partial}{\partial q^\gamma}\left(J g^{\gamma\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^\beta}\right) = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{3.2}$$

В отличие от (2.3) здесь для сокращения записи мы используем контравариантные компоненты $g^{\gamma\beta}$ метрического тензора, а также тензорное правило суммирования по повторяющимся верхнему и нижнему индексам γ и β.

Для ортогонального отображения (3.1) выполяются условия:

$$g_{12} = 0, \quad g_{13} = 0, \quad g_{23} = 0, \tag{3.3}$$

и тождества (3.2) принимают вид уравнений, не содержащих смешанных производных от функций x^α:

$$\frac{\partial}{\partial q^1}\left(\frac{g_{22}g_{33}}{J}\frac{\partial x^\alpha}{\partial q^1}\right) + \frac{\partial}{\partial q^2}\left(\frac{g_{11}g_{33}}{J}\frac{\partial x^\alpha}{\partial q^2}\right) + \frac{\partial}{\partial q^3}\left(\frac{g_{11}g_{22}}{J}\frac{\partial x^\alpha}{\partial q^3}\right) = 0, \quad \alpha = 1,2,3. \tag{3.4}$$

Если потребовать, чтобы отображение (3.1) подчинялось принципу эквираспределения в дифференциальной форме:

$$w(\mathbf{x}(\mathbf{q}))J(\mathbf{q}) = C, \quad C = \mathrm{const}, \quad \mathbf{q} = (q^1, q^2, q^3) \in Q, \tag{3.5}$$

где J — якобиан отображения (3.1), а $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$, то функции $x^\alpha = x^\alpha(q^1, q^2, q^3)$ будут решениями трехмерных уравнений метода эквираспределения в дифференциальной форме (ED3-уравнений):

$$ED3: \quad \frac{\partial}{\partial q^1}\left(g_{22}g_{33}w\frac{\partial x^\alpha}{\partial q^1}\right) + \frac{\partial}{\partial q^2}\left(g_{11}g_{33}w\frac{\partial x^\alpha}{\partial q^2}\right) + \frac{\partial}{\partial q^3}\left(g_{11}g_{22}w\frac{\partial x^\alpha}{\partial q^3}\right) = 0, \quad \alpha = 1,2,3. \tag{3.6}$$

Также как и в двумерном случае, справедливо утверждение, обратное к только что сформулированному.

Лемма 3.1. *Если отображение (3.1), задаваемое решениями уравнений (3.6), является невырожденным и ортогональным, то оно будет и адаптивным в смысле выполнения равенства (3.5).*

Покроем единичный куб Q прямоугольной равномерной сеткой. Кроме сетки с целыми узлами будут также использоваться сетки с узлами, сдвинутыми на полшага в одном, двух или в трех координатных направлениях.

Введем базисные операторы разностных производных:

$$(D_{q_1}\varphi)(\mathbf{q}) = \frac{\varphi(q^1 + h_1/2, q^2, q^3) - \varphi(q^1 - h_1/2, q^2, q^3)}{h_1}, \tag{3.7}$$

$$(D_{q_2}\varphi)(\mathbf{q}) = \frac{\varphi(q^1, q^2 + h_2/2, q^3) - \varphi(q^1, q^2 - h_2/2, q^3)}{h_2}, \tag{3.8}$$

$$(D_{q_3}\varphi)(\mathbf{q}) = \frac{\varphi(q^1, q^2, q^3 + h_3/2) - \varphi(q^1, q^2, q^3 - h_3/2)}{h_3}. \tag{3.9}$$

При вычислении производных (3.7) – (3.9) необходимо, так же как и при вычислении разностных производных (2.7), (2.8), учитывать область определения сеточной функции φ и при необходимости использовать усреднение.

Ячейка (см. рис. 2) криволинейной сетки, покрывающей физическую область Ω, является шестигранником с неплоскими, вообще говоря, гранями. Хотя грань является неплоским четырехугольником, тем не менее отрезки, соединяющие середины противоположных сторон грани, лежат в одной плоскости и пересекаются в некоторой точке, которую и будем называть центром грани.

Указанные выше отрезки будем называть средними линиями граней. Средними линиями ячейки будем называть отрезки, соединяющие центры противоположных граней. Легко показать, что средние линии выпуклой ячейки пересекаются в одной точке. Эту точку будем называть центром ячейки.

Объем ячейки будем вычислять по формуле

$$\begin{aligned} S_{j+1/2} = (\mathbf{x}_{j_1+1,j_2+1/2,j_3+1/2} - \mathbf{x}_{j_1,j_2+1/2,j_3+1/2}) \cdot \big[(\mathbf{x}_{j_1+1/2,j_2+1,j_3+1/2} - \\ - \mathbf{x}_{j_1+1/2,j_2,j_3+1/2}) \times (\mathbf{x}_{j_1+1/2,j_2+1/2,j_3+1} - \mathbf{x}_{j_1+1/2,j_2+1/2,j_3})\big]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Если при вычислении якобиана J отображения (3.1) использовать базисные операторы (3.7) – (3.9), то будем иметь равенство, аналогичное (2.12):

$$S_{j+1/2} = J_{j+1/2}h_1h_2h_3, \tag{3.11}$$

поэтому аналогом (3.5) на разностном уровне будет требование постоянства произведения объемов ячеек на управляющую функцию w:

$$w(\mathbf{x}_{j+1/2})S_{j+1/2} = \tilde{C}_h, \quad j_\alpha = 1, \ldots, N_\alpha - 1, \quad \alpha = 1,2,3. \tag{3.12}$$

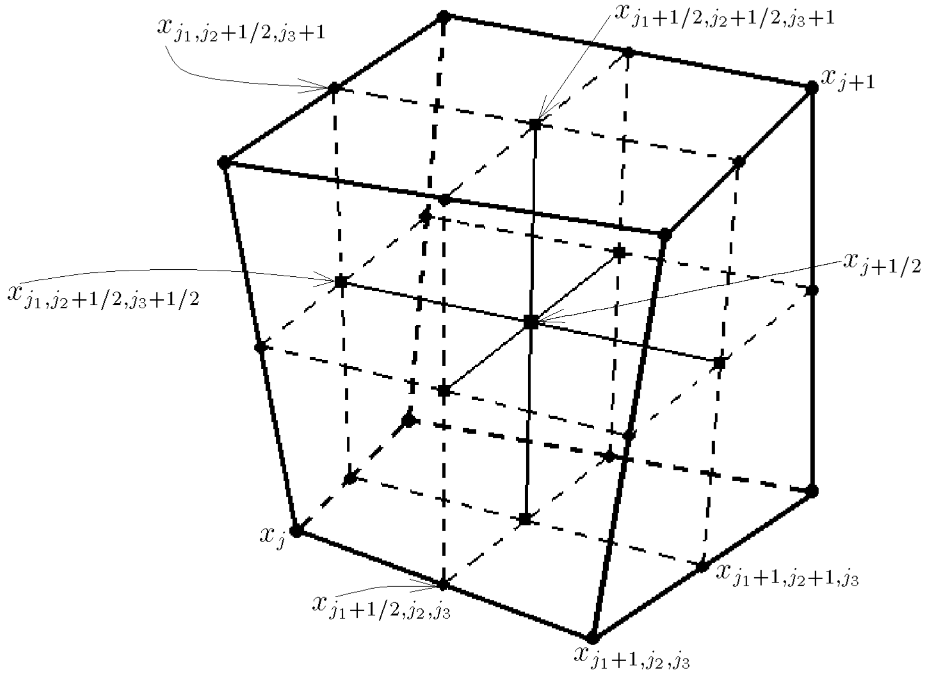

Рис. 2. Ячейка криволинейной трехмерной сетки, средние линии ячейки и граней, центры граней и центр ячейки.

Это равенство будем называть трехмерным принципом эквираспределения в разностной форме. Очевидно, что в силу (3.11) этот принцип можно записать и в таком виде:

$$w(\mathbf{x}_{j+1/2})J_{j+1/2} = C_h = \text{const}, \quad j_\alpha = 1, \dots, N_\alpha - 1, \quad \alpha = 1,2,3. \tag{3.13}$$

Уравнения (3.6) аппроксимируется со вторым порядком следующим конечно-разностным уравнением:

$$ED3: \qquad (\Lambda_1 x^\alpha + \Lambda_2 x^\alpha + \Lambda_3 x^\alpha)_j = 0, \qquad \mathbf{q}_j \in Q_h, \qquad \alpha = 1,2,3, \tag{3.14}$$

где

$$(\Lambda_1 x^\alpha)_j = D_{q^1}\left(g_{22}g_{33}wD_{q^1}x^\alpha\right)_j, \quad (\Lambda_2 x^\alpha)_j = D_{q^2}\left(g_{11}g_{33}wD_{q^2}x^\alpha\right)_j, \quad (\Lambda_3 x^\alpha)_j = D_{q^3}\left(g_{11}g_{22}wD_{q^3}x^\alpha\right)_j,$$

при этом предполагается, что сеточные функции x^α определены в целых узлах, а компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ и управляющая функция w — в центрах ячеек. Уравнения (3.14) будем называть уравнениями метода эквираспределения или ED3-уравнениями в разностной форме.

Для решения системы (3.14) используется метод стабилизирующей поправки:

$$\frac{\varphi^{n+1/3} - \varphi^n}{\tau} = \Lambda_1\varphi^{n+1/3} + \Lambda_2\varphi^n + \Lambda_3\varphi^n, \tag{3.15}$$

$$\frac{\varphi^{n+2/3} - \varphi^{n+1/3}}{\tau} = \Lambda_2(\varphi^{n+2/3} - \varphi^n), \tag{3.16}$$

$$\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+2/3}}{\tau} = \Lambda_3(\varphi^{n+1} - \varphi^n), \tag{3.17}$$

где $\varphi = x^\alpha$, n — номер итерации, τ — итерационный параметр, подбираемый экспериментально.

Каждый из шагов (3.15)–(3.17) реализуется скалярными прогонками, при этом предполагается, что координаты узлов на границе $\Gamma = \partial\Omega$ уже известны.

4. Построение сетки на пространственных поверхностях

Перейдем теперь к выводу уравнений метода эквираспределения для построения сеток на боковых поверхностях, ограничивающих физическую область Ω. На боковых поверхностях сетку также необходимо строить на основе принципа эквираспределения. Его формулировка состоит в том, что произведение площади каждой ячейки двумерной сетки, покрывающей криволинейную грань, на управляющую функцию в центре этой ячейки, должно быть величиной постоянной для выбранной грани. Исходя из этого принципа, можно выписать уравнение, конечно-разностный аналог которого служил бы для вычисления координат узлов сетки на поверхности. Вывод такого уравнения, основывается на проектировании трехмерного уравнения (3.6) на граничную поверхность при некоторых дополнительных предположениях о поведении отображения (3.1) вблизи границы.

Методику вывода поясним на примере получения уравнений для части Γ_{bot} граничной поверхности Γ, являющейся образом нижней грани $q^3 = 0$ куба Q. Предполагается, что эта часть границы задана в следующем параметрическом виде:

$$x^\alpha = f^\alpha(p^1, p^2), \quad 0 \le p^\beta \le 1, \quad \alpha = 1,2,3, \quad \beta = 1,2. \tag{4.1}$$

Относительно преобразования (3.1) делаются следующие предположения:

1) координатные линии этого отображения ортогональны на Γ_{bot};

2) кривизна координатных линий третьего семейства в точках их пересечения с Γ_{bot} равна нулю;

3) координатные поверхности $q^3 = \mathrm{const}$ “параллельны” поверхности Γ_{bot} в некоторой ее окрестности.

Отметим, что второе предположение использовалось ранее в работе [7] при получении уравнений для поверхностной расчетной сетки из уравнений [8] для внутренних узлов.

Лемма 4.1. *Пусть выполнены условия 1) – 3) и уравнение (3.6) выполняется вплоть до границы* Γ_{bot}. *Тогда*

$$wJ(q^1, q^2, 0) = \mathrm{const}, \quad 0 < q^\alpha < 1, \quad \alpha = 1,2. \tag{4.2}$$

Пусть

$$p^\alpha = p^\alpha(q^1, q^2), \quad \alpha = 1,2, \tag{4.3}$$

взаимно-однозначное невырожденное преобразование. Используя Лемму 4.1, ортогональность отображения и условие 3), мы получаем следующие уравнения для функций $p^\alpha(q^1, q^2)$, $\alpha = 1,2$:

$$EDS: \qquad \frac{\partial}{\partial q^1}\left(w\sqrt{g_{22}g_{33}}\frac{\widetilde{g}_{22}}{\widetilde{J}}\frac{\partial p^\alpha}{\partial q^1}\right) + \frac{\partial}{\partial q^2}\left(w\sqrt{g_{22}g_{33}}\frac{\widetilde{g}_{11}}{\widetilde{J}}\frac{\partial p^\alpha}{\partial q^2}\right) = 0, \quad \alpha = 1,2, \tag{4.4}$$

где $\widetilde{g}_{\alpha\beta}$ — ковариантные компоненты метрического тензора, $\widetilde{J}$ — якобиан отображения (4.3).

Конечно-разностные уравнения для вычисления координат узлов получаются аппроксимацией уравнений (4.4) на 9-точечном шаблоне с помощью интегро-интерполяционного метода. По виду эти разностные уравнения совпадают с ED2-уравнениями:

$$EDS: \qquad \left(D_{q^1}(\widetilde{w}\widetilde{g}_{22}D_{q^1}p^\alpha) + D_{q^2}(\widetilde{w}\widetilde{g}_{11}D_{q^2}p^\alpha)\right)_{j_1,j_2,1} = 0, \quad \alpha = 1,2, \tag{4.5}$$

где сеточная функция $\widetilde{w} = w\sqrt{g_{22}g_{33}}/\widetilde{J}$ относится к центрам ячеек. Решаются эти системы нелинейных разностных уравнений итерационным методом продольно-поперечных прогонок.

Отметим, что если поверхность Γ_{bot} является плоской, и в качестве параметров p^α взяты декартовы координаты, то EDS-уравнения (4.4) переходят в ED2-уравнения для построения сеток в плоских областях.

5. Построение сетки на пространственных кривых

Получим уравнения метода эквираспределения для вычисления координат узлов на пространственной кривой, являющейся одним из ребер криволинейного шестигранника Ω. Пусть для определенности это ребро (далее обозначается $\mathcal{L}$) принадлежит двум поверхностям, являющимся образами при отображении (3.1) граней $q^3 = 0$ и $q^2 = 0$ единичного куба Q.

Исходя из общего принципа метода эквираспределения, будем строить сетку на рассматриваемом ребре так, чтобы длины отрезков между двумя соседними узлами сетки были обратно пропорциональны значениям управляющей функции в центрах этих отрезков. Причем для лучшего согласования положения узлов внутри области и на кривой $\mathcal{L}$ желательно использовать одну и ту же управляющую функцию w. Однако в таком случае w будет отвечать за степень концентрации узлов по разным признакам: внутри области значения w регулируют объем ячеек, а на $\mathcal{L}$ — длину одного из ребер шестигранной ячейки. Чтобы избежать любых нежелательных последствий, необходимо накладывать на отображение (3.1) дополнительные ограничения.

Итак, пусть функции x^α, определяющие отображение (3.1), являются решениями ED3-уравнений (3.6). Сформулируем дополнительные предположения о поведении функций x^α в окрестности кривой $\mathcal{L}$, при выполнении которых эти функции удовлетворяют принципу эквираспределения на $\mathcal{L}$:

$$\sqrt{g_{11}}w = \mathrm{const}, \quad \mathbf{q} = (q^1, 0, 0). \tag{5.1}$$

4) координатные линии этого отображения ортогональны на $\mathcal{L}$;

5) кривизна координатных линий второго и третьего семейства в точках их пересечения с $\mathcal{L}$ равна нулю;

6) координатные поверхности $q^2 = \mathrm{const}$ и $q^3 = \mathrm{const}$ "параллельны" кривой $\mathcal{L}$ в некоторой ее окрестности.

Лемма 5.1. *Пусть выполнены условия 4) – 6) и уравнение (3.6) выполняется в Ω вплоть до граничного ребра $\mathcal{L}$. Тогда на $\mathcal{L}$ будет справедливо равенство (5.1).*

Параметрическое уравнение кривой $\mathcal{L}$:

$$x^\alpha = f^\alpha(p), \quad 0 \le p \le 1, \quad \alpha = 1, 2, 3, \tag{5.2}$$

используется в уравнении метода эквираспределения для построения сетки на пространственной кривой (в EDC3-уравнении):

$$EDC3: \qquad \frac{\partial}{\partial q^1}\left(w\sqrt{\left(\frac{\partial f^1}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial f^2}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial f^3}{\partial p}\right)^2}\,\frac{\partial p}{\partial q^1}\right) = 0, \tag{5.3}$$

которое получается дифференцированием равенства (5.1) по переменной q^1. Если $\mathcal{L}$ является прямолинейным отрезком, то из (5.3) следует ED1-уравнение.

Для аппроксимации (5.3) будем использовать 3-точечное разностное уравнение:

$$EDC3: \qquad D_{q^1}(\widetilde{w} D_{q^1} p)_{j_1} = 0, \quad j_1 = 2, \ldots, N_1 - 1, \tag{5.4}$$

где

$$\widetilde{w} = w(f^1(p), f^2(p), f^3(p))\sqrt{(D_p f^1)^2 + (D_p f^2)^2 + (D_p f^3)^2},$$

при этом предполагается, что сеточная функция $\widetilde{w}$ определена в полуцелых узлах, а функция $p(q)$ — в целых узлах.

Нелинейное уравнение (5.4) решается итерационным методом. В качестве начального приближения для функции $p = p(q^1)$ берется линейная функция.

6. Примеры сеток

На рис. 3 приведены примеры трехмерных сеток, построенных с помощью метода эквираспределения.

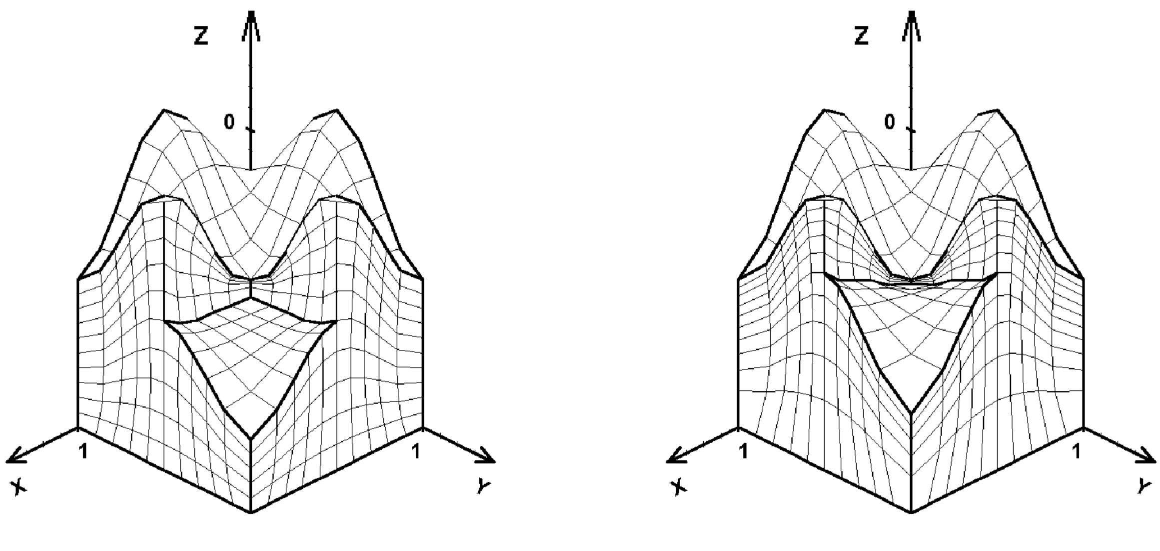

Рис. 3. Сетки после 100 итераций с управляющими функциями: а) $w = 1$; б) $w = 1 + 10(z + 1)$.

Список литературы

[1] Boor C. Good approximation by splines with variable knots. II // Lecture Notes in Mathematics. 1974. Vol. 363. P. 12–20.

[2] Dwyer H. A., Kee R. J., Sanders B. R. An adaptive grid method for problems in fluid mechanics and heat transfer // AIAA J. 1980. Vol. 18. P. 1205–1212.

[3] Dwyer H. A. Grid adaption for problems in fluid dynamics // AIAA J. 1984. Vol. 22, № 12. P. 1705–1712.

[4] Shyy W. Computation of complex fluid flows using an adaptive grid method // Int. J. Numer. Methods in Fluids. 1988. Vol. 8. P. 475–489.

[5] Chang P. Y., Shyy W. Adaptive frid computation of three-dimensional natural convection in horizontal high-pressure mercury lamps // Int. J. Numer. Methods in Fluids. 1991. Vol. 12. P. 143–160.

[6] Huang W., Sloan D. M. A simple adaptive grid method on two dimesions // SIAM J. Sci. Comput. 1994. Vol. 15, № 4. P. 776–797.

[7] Takagi T., Miki K., Chen B. C. J., Sha W. T. Numerical Generation of Boundary-Fitted Curvilinear Coordinate Systems for Arbitrarily Curved Surfaces // J. of Comp. Physics. 1985. Vol. 58. P. 67–79.

[8] Thompson J. F., Warsi Z. U. A., Mastin C. W. Numerical grid generation, foundations and applications // Amsterdam: Nort–Holland. 1985. 483 p.