

ДИНАМИКА ЛОКАЛЬНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ПОЛЯ ПЛОТНОСТИ В СДВИГОВОМ ПОТОКЕ ЛИНЕЙНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЫ

А. Н. Зудин, Г. Г. Черных

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

e-mail: zudin@ict.nsc.ru

Выполнено численное моделирование течения, генерируемого локальным возмущением поля плотности в линейно сдвиговом потоке линейно стратифицированной жидкости. Результаты расчётов демонстрируют значительное искажение волновой картины течения сдвиговым потоком.

Введение

Рассматривается течение, генерируемое локальным возмущением поля плотности в стратифицированной среде. Задача представляет интерес в связи с изучением ряда геофизических явлений. Подробная библиография и анализ работ, связанных с этой задачей, содержится в [1]–[6]. Анализ известных работ по численному моделированию течения показывает, что результаты численного моделирования динамики локального возмущения поля плотности в сдвиговом потоке стратифицированной жидкости [7] недостаточно полны. В настоящей работе представлены результаты расчётов, демонстрирующие эволюцию области частично перемешанной жидкости в сдвиговом линейно стратифицированном потоке.

1. Постановка задачи

Будем рассматривать сдвиговой поток вида $\mathbf{U} = (U(y), 0)$. Для описания течения привлекаются две математические модели. В качестве Модели 1 используются уравнения Эйлера в приближении Обербека-Буссинеска. С применением переменных № функция тока-завихренность уравнения Эйлера могут быть записаны в виде:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \omega, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + u \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + v \frac{\partial \rho_1}{\partial y} + v \frac{d\rho_s}{dy} = 0. \quad (3)$$

Здесь x, y — декартова система координат, ось y направлена вертикально вверх, против силы тяжести; $\rho_1 = \rho - \rho_s$; $\rho_s = \rho_s(y)$ — плотность невозмущенной среды вне зоны смешения; $\rho_0 = \rho_s(0)$; u, v — горизонтальная и вертикальная составляющие скорости жидкости: $u = \partial \psi / \partial y$, $v = -\partial \psi / \partial x$; g — ускорение силы тяжести. Стратификация среды предполагается устойчивой, т.е. $(1/\rho_0)d\rho_s/dy \leq 0$.

В качестве Модели 2 используются линейные уравнения Эйлера, которые для рассматриваемого сдвигового потока имеют вид:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} + U \frac{\partial \omega_1}{\partial x} = \frac{d^2 U}{dy^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial x}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} = \omega_1, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + U \frac{\partial \rho_1}{\partial x} - \frac{d\rho_s}{dy} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке СО РАН (интеграционный проект 2000-1) и Федеральной целевой программы Интеграция (проект № 274).

© А. Н. Зудин, Г. Г. Черных, 2001.

Величины ω_1, ψ_1 соответствуют отклонениям параметров течения от набегающего сдвигового потока. Граничные и начальные условия в рассматриваемой задаче таковы:

$$\hat{\psi} = \hat{\omega} = \psi_1 = \omega_1 = \rho_1 = 0, \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty, \quad (7)$$

$$\rho = \rho^0(x, y) = \rho_0 \left\{ 1 - \frac{\rho_0 - \rho_s(y)}{\rho_0} \left[1 - \varepsilon e^{-(1.25r)^8} \right] \right\},$$

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad t = 0, \quad (8)$$

$$\hat{\psi} = \hat{\omega} = \psi_1 = \omega_1 = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad t = 0. \quad (9)$$

Здесь $\varepsilon = \text{const} = 0.75$, $\hat{\psi} = \psi - \psi_s$, $\hat{\omega} = \omega - \omega_s$; ψ_s, ω_s — распределения функции тока и завихренности, соответствующие невозмущённому сдвиговому потоку $U = U(y)$. Условие (9) соответствует $u(0, x, y) = U(y)$, $v(0, x, y) = 0$.

При численном решении задачи системы уравнений (1)–(3), (4)–(6) предварительно приводились к безразмерному виду посредством использования характерных масштабов длины R (радиуса области смешения) и масштаба времени $T_* = 1/\sqrt{ag}$ ($a = -(1/\rho_0)d\rho_s/dy$); кроме того, используется также представление $\rho_1 = \rho_0 a R \tilde{\rho}_1$.

Численное интегрирование системы уравнений (1–3) осуществляется с помощью подхода, основанного на эйлерово-лагранжевых переменных и методе предиктор-корректор. При использовании линейной Модели 2 применялись стационарные равномерные и неравномерные сетки и метод предиктор-корректор. Подробности построения численных алгоритмов и их тестирование изложены в [4, 5, 8].

2. Результаты расчётов

В связи с тем, что симметрия (антисимметрия) течения при рассматриваемых ниже вариантах параметров сдвигового течения нарушается, решение отыскивалось в прямоугольнике $-\tilde{X} \leq \tilde{x} \leq \tilde{X}$, $-\tilde{Y} \leq \tilde{y} \leq \tilde{Y}$. Величины \tilde{X}, \tilde{Y} варьировались в ходе численных экспериментов. При проведении вычислений на основе Модели 1 обезразмеренный шаг сетки в горизонтальном направлении полагался равным 0.2; $\tilde{X} = 14$. Координатные линии $\eta = \text{const}$ по вертикали строились следующим образом [4]. При $x = \tilde{X}$ выбирались значения $y_0, \dots, y_j = y_{j-1} + h_j$, $j = 1, \dots, 35$; $h_0 = 0.117R$, $h_j = h_0 q^j$, $j = 1, \dots, 35$; $q = 1.025$. Линии $\eta = \eta_j$ при $t = 0$ отождествлялись с линиями $\rho = \rho_s(y_j)$. В нижней полуплоскости сетка строилась аналогичным образом. При расчётах по модели 2 значения \tilde{X}, \tilde{Y} существенно варьировались, сетка выбиралась равномерной в обоих направлениях.

Течение, генерируемое локальным возмущением поля плотности в линейно стратифицированной жидкости при наличии невозмущённого горизонтально однородного сдвигового потока вида $V = 0$, $\tilde{U}(\tilde{y}) = \alpha \tilde{y}$, $\alpha = \text{const}$, иллюстрируется рис. 1–5.

На рис. 1, а представлены рассчитанные с применением Модели 1 линии уровня дефекта функции тока $\tilde{\psi}_1 = \psi - \alpha \tilde{y}^2 = \psi T_*^2 / R^2 - \alpha (y/R)^2 / 2$, полученные для $t/2\pi T_* = 3$ и $\alpha = 0.14$ ($\text{Ri} = 1/T_*^2 (dU/dy)^2 = 49$). На рис. 1, б приведены линии $\tilde{\psi} = \text{const}$, соответствующие тому же значению времени t при $\alpha = 0$. Рис. 1, в получен с применением Модели 1, $\text{Ri} = 49$. Можно видеть, что рис. 1, а, 1, в достаточно близки и существенно отличаются от рис. 1, б количеством конвективных вихрей, характеризующих генерируемые локальным возмущением внутренние волны.

Эволюция зоны смешения иллюстрируется рис. 2, 3. Расчёты выполнялись по Модели 1. Рис. 2 соответствует коллапсу в покоящейся жидкости; рис. 3 — сдвиговому течению ($\alpha = 0, 14$; $\text{Ri} = 49$). Динамика зоны смешения прослеживалась путём введения в неё в начальный момент времени маркеров. Следует отметить, что при использовании эйлерово-лагранжевых переменных метод маркеров существенно упрощается, так как маркеры могут перемещаться лишь вдоль координатных линий $\eta = \text{const}$ ($\rho = \text{const}$). Анализируя рис. 2, 3 можно обратить внимание на наличие \aleph -шапочек. Их появление обусловлено, по видимому, особенностями начального распределения плотности в области перемешанной жидкости. Если в качестве области смешения считать круг радиуса $\tilde{r} = 0.8$ (а не $\tilde{r} = 1$, как на рис. 2, 3), то эти \aleph -шапочки исчезают. Граница области смешения становится несимметричной в связи с воздействием сдвигового потока; частицы жидкости, соответствующие частицам \aleph -шапочек, сносятся потоком со скоростью, близкой к $\tilde{U}(\tilde{y})$.

Внутренние волны, генерируемые локальным возмущением поля плотности в сдвиговом потоке линейно стратифицированной среды, иллюстрируются также рис. 4, на котором представлена линия равной

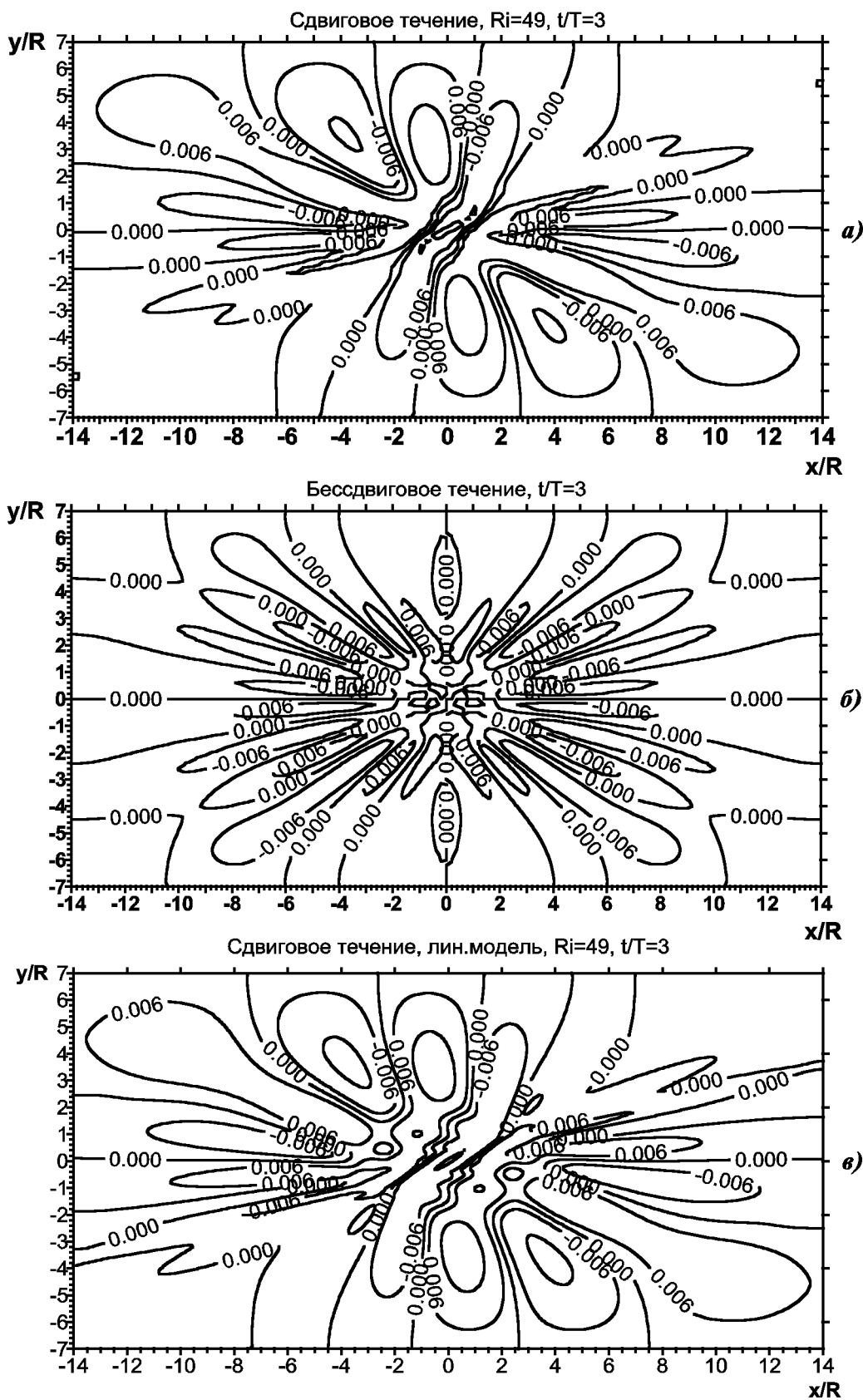


Рис. 1. Линии тока, $\alpha = 0.14$ (а), (в); бессдвиговый случай (б); (а), (б) — Модель 1, (в) — Модель 2.

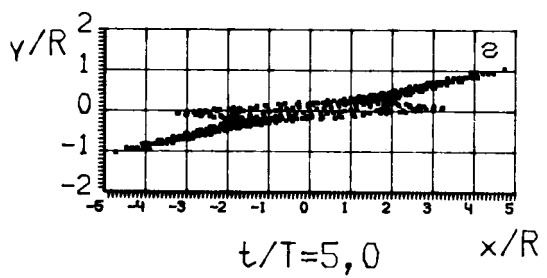
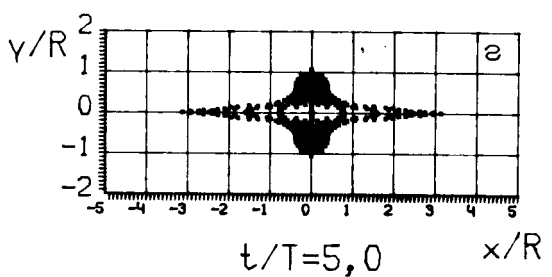
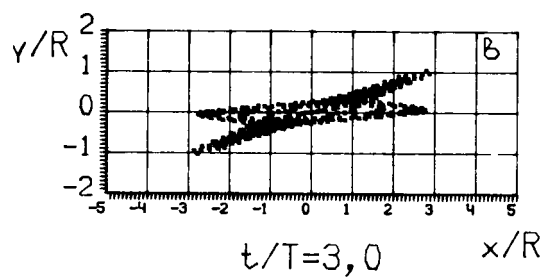
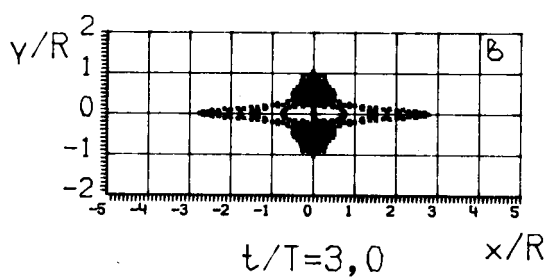
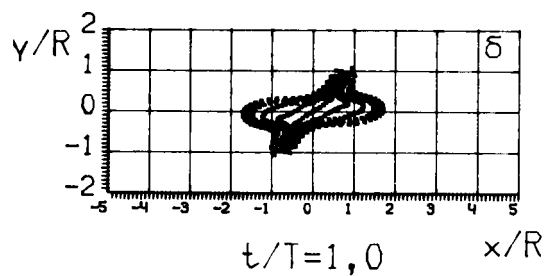
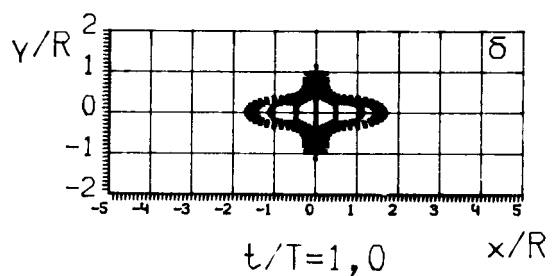
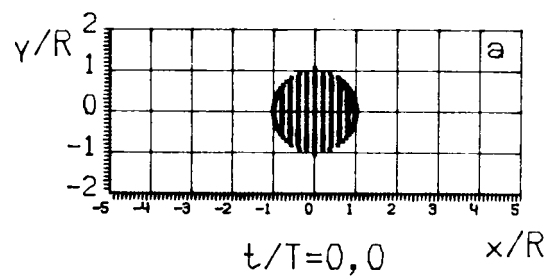
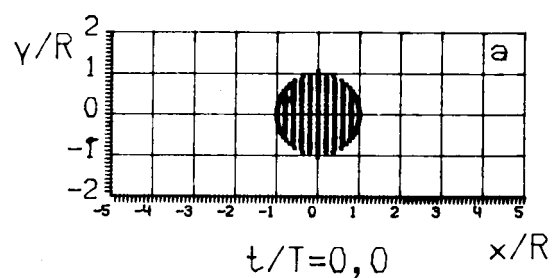


Рис. 2. Положение маркеров в бессдвиговом случае

Рис. 3. Положение маркеров в сдвиговом случае

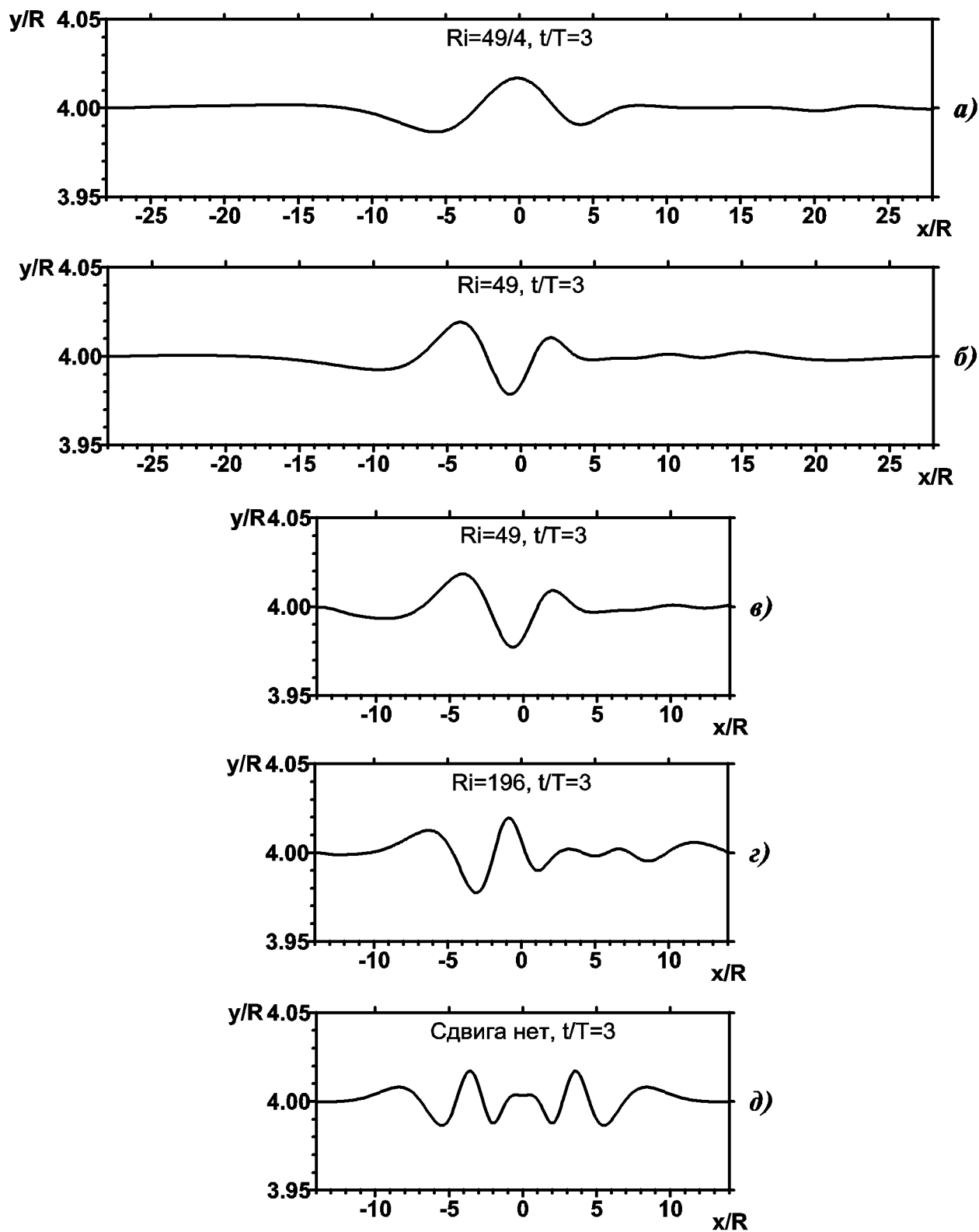


Рис. 4. Линия плотности $\rho = \rho_s(4)$, $t/T = 3$, $\alpha = 2/7$ (a), $\alpha = 1/7$ (б), (в), $\alpha = 1/14$ (г), бессдвиговое течение (д)

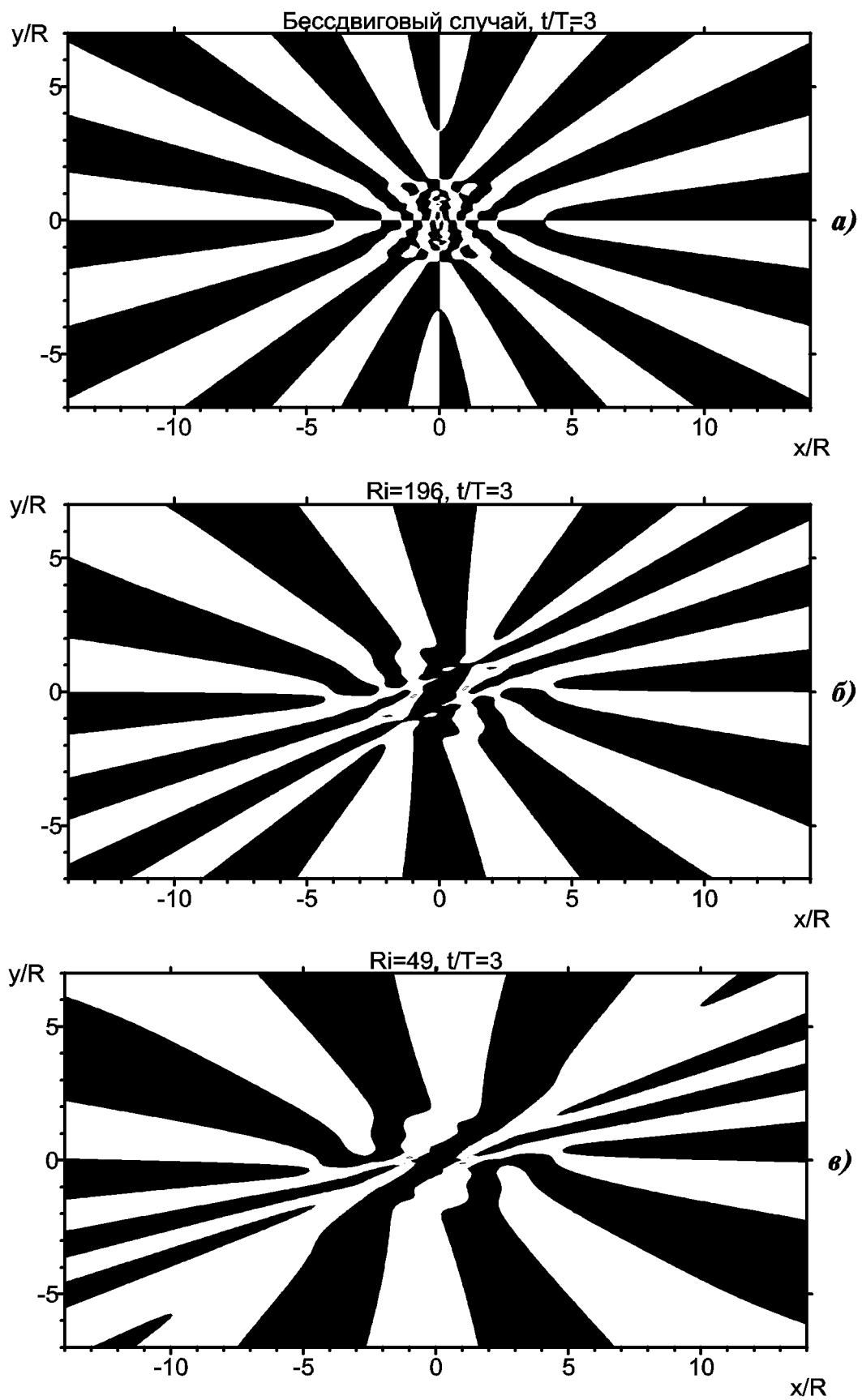


Рис. 5. Фазовая картина внутренних волн, $\partial\rho/\partial x = 0$, $t/T = 3$; бессдвиговый случай (а), $Ri=196$ (б), $Ri=49$ (в)

плотности $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_s(4)$. На рис. 4, в-д демонстрируется зависимость от числа Ричардсона, рис. 4, б соответствует расчётам на вдвое бóльшей в направлении x сеточной области. Можно видеть, что рис. 4, б, в практически совпадают в области $x/R \in [-14, 14]$, $y/R \in [3.95, 4.05]$. Аналогичная ситуация (близость изолиний) наблюдается и при дальнейшем увеличении области интегрирования как в горизонтальном, так и в вертикальном направлениях. Факт существенного взаимодействия сдвигового течения с внутренними волнами, генерируемыми локальным возмущением поля плотности, не зависит от размеров сеточной области. При расчётах по Моделям 1, 2 проводилось также сгущение сетки в 2 раза как в горизонтальном, так и в вертикальном направлениях. Получились результаты, близкие к представленным.

Фазовая картина внутренних волн представлена на рис. 5. В закрашенных областях $\partial\rho/\partial x < 0$, в незакрашенных $\partial\rho/\partial x > 0$. Границы между закрашенными и незакрашенными областями соответствуют линиям постоянной фазы. Выше отмечалось существенное различие линий уровня дефекта функции тока в сдвиговом и бессдвиговом случае (рис. 1). Аналогичная ситуация наблюдается и в распределении линий постоянной фазы на рис. 5: с уменьшением числа Ричардсона количество закрашенных и незакрашенных областей уменьшается. В связи с этим можно говорить о №поглощении части гребней и впадин сдвиговым потоком. Рис. 4, 5 получены с применением Модели 2. Модель 1 приводит к близким результатам.

Список литературы

- [1] СТЕПАНИЦ Ю.А., СТУРОВА И.В., ТЕОДОРОВИЧ Э.В. Линейная теория генерации поверхностных и внутренних волн // Итоги науки и техники. ВИНТИ. Сер. Механика жидкости и газа. 1987. Т. 21. С. 93–179.
- [2] МАДЕРИЧ В.С., НИКИШОВ В.И., СТЕЦЕНКО А.Г. Динамика внутреннего перемешивания в стратифицированной среде. Киев: Наукова Думка, 1988. 239 с.
- [3] HARTMAN R.J. The development of a partially mixed region in a stratified shear flow // J.Fluid Mech. 1975. Vol. 71. Pt. 2. P. 407–415.
- [4] ЗУДИН А.Н., ЧЕРНЫХ Г.Г. Об одном алгоритме расчёта нестационарных стратифицированных течений // Численные методы механики сплошной среды. Т. 13. № 5. Новосибирск: Изд. ВЦ СО АН СССР, ИТПМ СО АН СССР, 1982. С. 32–47.
- [5] ЗУДИН А.Н., ЧЕРНЫХ Г.Г. Внутренние волны, генерируемые локальным возмущением поля плотности в жидкости с нелинейной стратификацией // Моделирование в механике. Т. 2. № 4. Новосибирск: Изд. ВЦ СО АН СССР, ИТПМ СО АН СССР, 1988. С. 49–74.
- [6] СМИРНОВ Г.В., ВЕДЕНЬКОВ В.Е., ГАЛКОВСКИЙ А.Н. Об условиях генерации нелинейных внутренних волн при коллапсе перемешанного пятна в стратифицированной жидкости // Океанология. 1997. Т. 37. № 3. С. 338–344.
- [7] ЗУДИН А.Н., ЧЕРНЫХ Г.Г. Примеры расчёта нестационарных стратифицированных течений с применением эйлерово-лагранжевой системы координат. – Новосибирск, 1985. 50 с. (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-е. Ин-т теорет. и прикл.механики; № 9–85).
- [8] CHERNYKH G.G., VOROPAYEVA O.F., ZUDIN A.N. Numerical simulation of internal waves generated by local density perturbation in stratified medium // Cohen, Gary (ed.). Mathematical and numerical aspects of wave propagation. Proceedings of the third international conference. Mandelieu-La Napoule, France, April 24–28, 1995. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics. P. 119–128.