

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

В. П. СИРОЧЕНКО

Самарский государственный университет, Россия

Mathematical statement of problem for flow of viscous thermal conductive fluid in terms of stream function, velocity vortex and temperature in arbitrary two-dimensional multiply connected domain are presented. Mathematical model includes integral relationships which means the pressure is a single valued function. Numerical algorithm using implicit approximations of differential equations is constructed. Approximations of integral relationships which are co-ordinated with difference scheme for velocity vortex are obtained. The examples of numerical modelling of two-dimensional time-dependent natural convection in a cavity where there are internal body are demonstrated. The results of computations in the cases of some cavity configurations, boundary temperature regimes and different flow parameters are presented.

1. При моделировании течений вязкой жидкости, в которой имеют место процессы теплопроводности, часто используют систему уравнений для конвекции и теплообмена в приближении Буссинеска [2, 3]. Движение жидкости в поле тяжести вследствие неравномерного распределения температуры в фиксированной ограниченной двумерной области D с границей ∂D описывается уравнениями [2]

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} - \beta \vec{g} \theta, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \theta = \chi \Delta \theta, \quad (x, y) \in D, \quad t \in (0, T], \quad (3)$$

и начальными и граничными условиями

$$\vec{v} = \vec{v}_0(x, y), \quad \theta = \theta_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad t = 0, \quad (4)$$

$$\vec{v} = \vec{a}(x, y, t), \quad \theta = \zeta(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial D, \quad t \in (0, T]. \quad (5)$$

В этой системе x, y — декартовы координаты, t — время, \vec{v} — поле скоростей, p и θ — отклонения давления и температуры от их статических значений. Параметрами являются плотность ρ , коэффициенты кинематической вязкости ν , температуропроводности χ , а также ускорение свободного падения g и коэффициент теплового изменения плотности β .

Отметим, что уравнения (1)–(5) справедливы как для односвязных, так и многосвязных областей.

Рассмотрим неустановившееся течение вязкой теплопроводной жидкости в ограниченной $(N + 1)$ — связной двумерной области D , граница которой $\partial D = \bigcup_{i=0}^N \Gamma_i$ состоит из непересекающихся замкнутых контуров $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_N$, причем контур Γ_0 охватывает остальные контуры.

Введем функцию тока ψ и завихренность ω , которые связаны с компонентами скорости u, v соотношениями

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

В двумерном случае задача (1)–(5) может быть сведена к трем скалярным уравнениям относительно завихренности ω , функции тока ψ и температуры θ при соответствующих начальных и граничных условиях [4, 5]. В многосвязной области функции ω, ψ и θ должны удовлетворять еще некоторым интегральным соотношениям, которые эквивалентны однозначности давления в жидкости [1, 7]. Математическая задача относительно переменных ω, ψ, θ , описывающая конвективное течение неравномерно нагретой вязкой жидкости в многосвязной области D , может быть сформулирована следующим образом:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \Delta \omega + \beta g \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (6)$$

$$\Delta\psi = -\omega, \quad (7)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial y} = \chi\Delta\theta, \quad (x, y) \in D, \quad t \in (0, T], \quad (8)$$

$$\omega = \alpha(x, y), \quad \theta = \phi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad t = 0, \quad (9)$$

$$\psi = \xi_0(x, y, t), \quad \frac{\partial\psi}{\partial\bar{n}} = \eta_0(x, y, t), \quad (x, y) \in \Gamma_0, \quad t \in (0, T], \quad (10)$$

$$\psi = \xi_l(x, y, t) + \lambda_l(t), \quad \frac{\partial\psi}{\partial\bar{n}} = \eta_l(x, y, t), \quad (x, y) \in \Gamma_l, \quad l = 1, \dots, N, \quad t \in (0, T], \quad (11)$$

$$\theta = \zeta_l(x, y, t), \quad (x, y) \in \Gamma_l, \quad l = 0, \dots, N, \quad t \in (0, T], \quad (12)$$

$$\oint_{\gamma_i} \left[\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t \partial y} + \omega \frac{\partial\psi}{\partial x} + \nu \frac{\partial\omega}{\partial y} \right) dx + \left(-\frac{\partial^2\psi}{\partial t \partial x} + \omega \frac{\partial\psi}{\partial y} - \nu \frac{\partial\omega}{\partial x} - \beta g \theta \right) dy \right] = 0, \quad (13)$$

$$l = 1, \dots, N, \quad t \in (0, T].$$

Здесь предполагается, что ось y направлена вертикально вверх, \bar{n} — направление внешней нормали к границе ∂D , $\alpha, \phi, \xi_i, \eta_i, \zeta_i, i = 0, \dots, N$, — заданные функции, $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ — произвольный набор из N замкнутых контуров, охватывающих внутренние границы $\Gamma_i, i = 1, \dots, N$, такой, что условия однозначности давления (13) являются независимыми.

В многосвязной области функция тока ψ является определенной только на одной из границ, а на остальных определена с точностью до аддитивных функций времени $\lambda_i, i = 1, \dots, N$, которые должны находиться в процессе решения задачи. Количество этих функций совпадает с количеством интегральных условий (13). Таким образом, условия однозначности давления (13) замыкают задачу и позволяют однозначно определить функцию тока ψ во всей многосвязной области, в том числе и на границах.

В работе [1] проведено обоснование различных постановок двумерных задач гидродинамики в многосвязных областях, полученных в результате исключения давления из уравнений движения и введения новых переменных — функции тока и завихренности. Обоснование заключается в математическом доказательстве эквивалентности постановок достаточно хорошо изученным начально-краевым задачам для уравнений относительно естественных переменных скорость - давление - температура. Существенную роль в установлении эквивалентности играют интегральные условия однозначности давления.

Наличие неизвестных заранее функций $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t)$, входящих в граничные условия (11), а также интегральный характер условий однозначности давления (13) вызывают определенные затруднения при численном решении задачи.

Опишем алгоритм приближенного решения задачи (6)–(13), использующий неявные разностные аппроксимации по времени. Алгоритм формулируется для дифференциально-разностной задачи, полученной дискретизацией по времени. Такой подход дает возможность получить универсальный алгоритм без дискретизации пространственных аппроксимаций.

Проведем конечно-разностную аппроксимацию задачи по t . Аппроксимацию по пространственным переменным x, y явно выписывать не будем, предполагая, что это будет сделано при непосредственной реализации алгоритма. В результате вместо дифференциальной задачи (6)–(13) получим дифференциально-разностную задачу

$$\frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\tau} + \frac{\partial\psi^n}{\partial y} \frac{\partial\omega^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial\psi^n}{\partial x} \frac{\partial\omega^{n+1}}{\partial y} = \nu\Delta\omega^{n+1} + \beta g \frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial x}, \quad (14)$$

$$\Delta\psi^{n+1} = -\omega^{n+1}, \quad (15)$$

$$\frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\tau} + \frac{\partial\psi^n}{\partial y} \frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial\psi^n}{\partial x} \frac{\partial\theta^{n+1}}{\partial y} = \chi\Delta\theta^{n+1}, \quad (x, y) \in D, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (16)$$

$$\psi^0 = \varphi(x, y), \quad \omega^0 = \alpha(x, y) = -\Delta\varphi(x, y), \quad \theta^0 = \phi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad (17)$$

$$\psi^{n+1} = \xi_0(x, y, t^{n+1}), \quad \frac{\partial\psi^{n+1}}{\partial\bar{n}} = \eta_0(x, y, t^{n+1}), \quad (x, y) \in \Gamma_0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (18)$$

$$\psi^{n+1} = \xi_l(x, y, t^{n+1}) + \lambda_l^{n+1}, \quad \frac{\partial\psi^{n+1}}{\partial\bar{n}} = \eta_l(x, y, t^{n+1}),$$

$$(x, y) \in \Gamma_l, \quad l = 1, \dots, N, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \theta^{n+1} &= \zeta_l(x, y, t^{n+1}), \quad (x, y) \in \Gamma_l, \quad l = 0, \dots, N, \quad n = 0, 1, \dots, \\ &\oint_{\gamma_l} \left[\left(\frac{1}{\tau} \left(\frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial y} - \frac{\partial \psi^n}{\partial y} \right) + \omega^{n+1} \frac{\partial \psi^n}{\partial x} + \nu \frac{\partial \omega^{n+1}}{\partial y} \right) dx + \right. \\ &\left. + \left(-\frac{1}{\tau} \left(\frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial \psi^n}{\partial x} \right) + \omega^{n+1} \frac{\partial \psi^n}{\partial y} - \nu \frac{\partial \omega^{n+1}}{\partial x} - \beta g \theta^{n+1} \right) dy \right] = 0, \\ &l = 1, \dots, N, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (20)$$

При нахождении решения задачи на $(n+1)$ -ом слое по времени прежде всего заметим, что температура θ^{n+1} может быть найдена из соотношений (16), (20) независимо от остальных искомых функций.

Пользуясь линейностью всех соотношений задачи (14)–(21) относительно ω^{n+1} , ψ^{n+1} , применим классический метод суперпозиции. Будем искать решение в виде

$$\omega^{n+1}(x, y) = \omega_0^{n+1}(x, y) + \sum_{l=1}^N \lambda_l^{n+1} \omega_l^{n+1}(x, y), \quad (22)$$

$$\psi^{n+1}(x, y) = \psi_0^{n+1}(x, y) + \sum_{l=1}^N \lambda_l^{n+1} \psi_l^{n+1}(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}. \quad (23)$$

Здесь $\omega_0^{n+1}(x, y)$, $\psi_0^{n+1}(x, y)$ являются решением задачи

$$\frac{\omega_0^{n+1} - \omega^n}{\tau} + \frac{\partial \psi^n}{\partial y} \frac{\partial \omega_0^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial \psi^n}{\partial x} \frac{\partial \omega_0^{n+1}}{\partial y} = \nu \Delta \omega_0^{n+1} + \beta g \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial x}, \quad (24)$$

$$\Delta \psi_0^{n+1} = -\omega_0^{n+1}, \quad (x, y) \in D, \quad (25)$$

$$\psi_0^{n+1} = \xi_m(x, y, t^{n+1}), \quad \frac{\partial \psi_0^{n+1}}{\partial \bar{n}} = \eta_m(x, y, t^{n+1}), \quad (x, y) \in \Gamma_m, \quad m = 0, \dots, N. \quad (26)$$

Для функций $\omega_l^{n+1}(x, y)$, $\psi_l^{n+1}(x, y)$, $l = 1, \dots, N$, имеем следующие задачи

$$\frac{\omega_l^{n+1}}{\tau} + \frac{\partial \psi^n}{\partial y} \frac{\partial \omega_l^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial \psi^n}{\partial x} \frac{\partial \omega_l^{n+1}}{\partial y} = \nu \Delta \omega_l^{n+1}, \quad (27)$$

$$\Delta \psi_l^{n+1} = -\omega_l^{n+1}, \quad (x, y) \in D, \quad (28)$$

$$\psi_l^{n+1} = \delta_{lm}, \quad \frac{\partial \psi_l^{n+1}}{\partial \bar{n}} = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_m, \quad m = 0, \dots, N, \quad l = 1, \dots, N. \quad (29)$$

Очевидно, при таком определении функций ω_0^{n+1} , ψ_0^{n+1} , ω_l^{n+1} , ψ_l^{n+1} , $l = 1, \dots, N$, при любых λ_l^{n+1} , $l = 1, \dots, N$, функции ω^{n+1} , ψ^{n+1} будут удовлетворять уравнениям (14)–(15) и граничным условиям (18), (19).

Потребуем, чтобы ω^{n+1} , ψ^{n+1} удовлетворяли также условиям однозначности давления (21). Подставляя (22), (23) в (21), получим систему линейных алгебраических уравнений для λ_1^{n+1} , λ_2^{n+1} , ..., λ_N^{n+1}

$$\sum_{m=1}^N a_{lm} \lambda_m^{n+1} = b_l, \quad l = 1, \dots, N, \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} a_{lm} &= \oint_{\gamma_l} \left[\left(\frac{1}{\tau} \frac{\partial \psi_m^{n+1}}{\partial y} + \omega_m^{n+1} \frac{\partial \psi^n}{\partial x} + \nu \frac{\partial \omega_m^{n+1}}{\partial y} \right) dx + \right. \\ &\left. + \left(-\frac{1}{\tau} \frac{\partial \psi_m^{n+1}}{\partial x} + \omega_m^{n+1} \frac{\partial \psi^n}{\partial y} - \nu \frac{\partial \omega_m^{n+1}}{\partial x} \right) dy \right] = 0, \quad l, m = 1, \dots, N, \\ b_l &= -\oint_{\gamma_l} \left[\left(\frac{1}{\tau} \left(\frac{\partial \psi_0^{n+1}}{\partial y} - \frac{\partial \psi^n}{\partial y} \right) + \omega_0^{n+1} \frac{\partial \psi^n}{\partial x} + \nu \frac{\partial \omega_0^{n+1}}{\partial y} \right) dx + \right. \end{aligned} \quad (31)$$

$$+ \left(-\frac{1}{\tau} \left(\frac{\partial \psi_0^{n+1}}{\partial x} - \frac{\partial \psi^n}{\partial x} \right) + \omega_0^{n+1} \frac{\partial \psi^n}{\partial y} - \nu \frac{\partial \omega_0^{n+1}}{\partial x} - \beta g \theta^{n+1} \right) dy \Big] = 0, \quad l = 1, \dots, N. \quad (32)$$

Сформулируем приближенный алгоритм для решения задачи конвективного тепло- и массообмена для вязкой жидкости в многосвязной области, основанный на неявных схемах.

Пусть известны функции $\psi^n(x, y)$, $\omega^n(x, y)$, $\theta^n(x, y)$, $(x, y) \in \bar{D}$, на n -ом слое по времени. В частности, при $n = 0$ эти функции заданы начальными условиями (17). Чтобы найти решение на следующем $(n+1)$ -ом слое по времени нужно решить краевую задачу (16), (20) для функции $\theta^{n+1}(x, y)$, $(x, y) \in \bar{D}$ и краевые задачи (24)–(26) и (27)–(29) для функций $\psi_0^{n+1}(x, y)$, $\omega_0^{n+1}(x, y)$, $\psi_l^{n+1}(x, y)$, $\omega_l^{n+1}(x, y)$, $(x, y) \in \bar{D}$, $l = 1, \dots, N$. Затем из системы линейных алгебраических уравнений (30), (31), (32) находятся λ_l^{n+1} , $l = 1, \dots, N$. После этого по формулам (22), (23) вычисляются функции $\psi^{n+1}(x, y)$, $\omega^{n+1}(x, y)$, $(x, y) \in \bar{D}$. Для счета следующего шага по времени вся процедура повторяется.

Таким образом, в описанном алгоритме нахождение решения на каждом слое по времени сводится к решению $N+2$ краевых задач в многосвязной области D и системы линейных алгебраических уравнений (30). Краевые задачи (16), (20) и (24)–(26), (27)–(29) решаются разностным методом с использованием прямых или итерационных методов решения сеточных уравнений.

Используемые в данном алгоритме полунявные схемы для завихренности и температуры (14), (16) являются линейными относительно разностного решения на верхнем слое по времени. Применение полностью неявных схем, когда все величины, входящие в конвективные члены, берутся на $(n+1)$ -ом слое по времени, усложняет алгоритм. В этом случае нелинейная разностная задача для решения на $(n+1)$ -ом слое реализуется итерационным методом, и на каждой итерации для линейной разностной задачи может применяться алгоритм, аналогичный изложенному алгоритму.

2. Разработанный алгоритм применен для расчета движения теплопроводной вязкой жидкости в полости с одним телом внутри.

Рассмотрим свободную тепловую гравитационную конвекцию вязкой жидкости в замкнутой прямоугольной полости D с границей Γ_0 , содержащей внутри тело прямоугольной формы с границей Γ_1 . Течение определяется переменными функция тока – завихренность – температура, удовлетворяющими уравнениям (6)–(8), (13) и дополнительным условиям

$$\omega = 0, \quad \theta = \phi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad t = 0, \quad (33)$$

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \bar{n}} = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_0, \quad t \in (0, T], \quad (34)$$

$$\psi = \lambda_1(t), \quad \frac{\partial \psi}{\partial \bar{n}} = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_1, \quad t \in (0, T], \quad (35)$$

$$\theta = \zeta_l(x, y, t), \quad (x, y) \in \Gamma_l, \quad l = 0, 1, \quad t \in (0, T]. \quad (36)$$

Принимается, что в начальный момент времени жидкость неподвижна, а ее температура $\theta = \phi(x, y)$ задается из решения стационарной задачи

$$\Delta \phi(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D,$$

$$\theta = \zeta_l(x, y, 0), \quad (x, y) \in \Gamma_l, \quad l = 0, 1.$$

В основе численного метода решения задачи лежит алгоритм, использующий неявные разностные схемы и сформулированный в п. 1.

Аналогичная задача численно решалась в [9]. В этой работе применялась явная схема, что приводило к неустойчивости счета. Для стабилизации вычислительного процесса использовались искусственные приемы типа осреднения решения на нескольких шагах по времени. Условие однозначности давления в работе [9] записывалось на внутренних границах.

Пусть прямоугольник, ограничивающий полость, имеет размеры l_1 и l_2 по направлениям x и y . Введем в области D равномерную прямоугольную сетку с шагами $h_1 = l_1/N_1$ и $h_2 = l_2/N_2$. Множество внутренних узлов сетки обозначим ω_h , множество граничных узлов — γ_h . Разностная сетка является согласованной, т. е. все граничные узлы γ_h лежат на границе области $\partial D = \Gamma_0 + \Gamma_1$. Обозначим также γ_h^l — множество граничных узлов, находящихся на сторонах прямоугольника Γ_l , $\gamma_h^{l,hor}$ и $\gamma_h^{l,ver}$ — множества граничных узлов, находящихся на его горизонтальных и вертикальных сторонах, так что

$$\gamma_h = \gamma_h^0 + \gamma_h^1 = \sum_{l=0}^1 (\gamma_h^{l,hor} + \gamma_h^{l,ver}).$$

Для аппроксимации дифференциальных уравнений (6), (7) применим однородные разностные схемы

$$\frac{\omega^{n+1} - \omega^n}{\tau} + \Lambda_2 \psi^n \Lambda_1 \omega^{n+1} - \Lambda_1 \psi^n \Lambda_2 \omega^{n+1} = (\Lambda_{11} + \Lambda_{22}) \omega^{n+1} + \beta g \Lambda_1 \theta^{n+1}, \quad (37)$$

$$(\Lambda_{11} + \Lambda_{22}) \psi^{n+1} = -\omega^{n+1}, \quad (x, y) \in \omega_h, \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_1 u_{i,j}^n &= \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2h_1}, & \Lambda_2 u_{i,j}^n &= \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2h_2}, \\ \Lambda_{11} u_{i,j}^n &= \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{h_1^2}, & \Lambda_{22} u_{i,j}^n &= \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h_2^2}. \end{aligned}$$

Схема (37) имеет аппроксимацию $O(\tau + h_1^2 + h_2^2)$ и абсолютно устойчива по начальным данным в линейном случае. Для схемы (38) погрешность аппроксимации равна $O(h_1^2 + h_2^2)$.

Разностные граничные условия для (38) следуют непосредственно из (34), (35)

$$\psi^{n+1} = 0, \quad (x, y) \in \gamma_h^0, \quad (39)$$

$$\psi^{n+1} = \lambda_1^{n+1}, \quad (x, y) \in \gamma_h^1. \quad (40)$$

Для задания граничных значений для завихренности ω используется известная формула Тома (см., например, [6])

$$\omega_b = \frac{2}{h^2} (\psi_b - \psi_{b+1}),$$

где индекс b соответствует узлу сетки на границе, $b+1$ — ближайшему к границе узлу, а h равно h_1 или h_2 . Применительно к нашей задаче разностные граничные условия для завихренности с учетом (39), (40) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \omega^{n+1}(x, y) &= -\frac{2}{h_1^2} \psi^{n+1}(x + s_1, y), \quad (x, y) \in \gamma_h^{0,ver}, \\ \omega^{n+1}(x, y) &= -\frac{2}{h_2^2} \psi^{n+1}(x, y + s_2), \quad (x, y) \in \gamma_h^{0,hor}, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \omega^{n+1}(x, y) &= \frac{2}{h_1^2} (\lambda_1^{n+1} - \psi^{n+1}(x + s_1, y)), \quad (x, y) \in \gamma_h^{1,ver}, \\ \omega^{n+1}(x, y) &= \frac{2}{h_2^2} (\lambda_1^{n+1} - \psi^{n+1}(x, y + s_2)), \quad (x, y) \in \gamma_h^{1,hor}. \end{aligned} \quad (42)$$

Здесь $s_1 = h_1$, если область D находится справа от участка границы, на котором находится узел сетки (x, y) , и $s_1 = -h_1$, если область D находится слева от этого участка границы. Аналогично, $s_2 = h_2$, если область D находится сверху от участка границы, на котором находится узел сетки (x, y) , и $s_2 = -h_2$, если область D находится снизу от этого участка границы. Условия (41), (42) аппроксимируют вторые условия из (34), (35) на решении задачи с погрешностями $O(h_1^2)$ и $O(h_2^2)$.

Уравнение для температуры (8) заменим разностной схемой переменных направлений

$$\frac{\theta^{n+1/2} - \theta^n}{\tau} + \Lambda_2 \psi^n \Lambda_1 \theta^{n+1/2} - \Lambda_1 \psi^n \Lambda_2 \theta^n = \chi (\Lambda_{11} \theta^{n+1/2} + \Lambda_{22} \theta^n), \quad (43)$$

$$\frac{\theta^{n+1} - \theta^{n+1/2}}{\tau} + \Lambda_2 \psi^n \Lambda_1 \theta^{n+1/2} - \Lambda_1 \psi^n \Lambda_2 \theta^{n+1} = \chi (\Lambda_{11} \theta^{n+1/2} + \Lambda_{22} \theta^{n+1}), \quad (x, y) \in \omega_h. \quad (44)$$

К уравнениям (43) добавляются разностные граничные условия для $\theta^{n+1/2}$ в узлах, лежащих на вертикальных частях границы ∂D ,

$$\theta^{n+1/2} = \frac{\zeta_l^n + \zeta_l^{n+1}}{2} - \frac{\tau \chi}{4} \Lambda_{22} (\zeta_l^{n+1} - \zeta_l^n), \quad (x, y) \in \gamma_h^{l,ver}, \quad l = 0, 1, \quad (45)$$

а к уравнениям (44) — разностные граничные условия для θ^{n+1} в узлах, лежащих на горизонтальных частях границы ∂D ,

$$\theta^{n+1} = \zeta_l^{n+1}, \quad (x, y) \in \gamma_h^{l,hor}, \quad l = 0, 1. \quad (46)$$

Разностные соотношения (43)–(46) аппроксимируют соответствующие соотношения дифференциальной задачи (8), (36) с погрешностью $O(\tau + h_1^2 + h_2^2)$ и представляют абсолютно устойчивую схему в линейном случае.

Для условия однозначности давления (13) получена аппроксимация, совместимая с разностной схемой для завихренности (37) [10]. Такая аппроксимация обеспечивает независимость на разностном уровне интеграла от замкнутой ломаной, по которой он вычисляется. В качестве контура γ_1 , возьмем прямоугольник, охватывающий границу Γ_1 , и отстоящий от нее на полшага сетки в каждом из направлений x и y . Подынтегральные выражения в (13) приближенно заменяются разностными выражениями

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \omega \frac{\partial \psi}{\partial x} + \nu \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)_{i,j-1/2}^{n+1} \approx \frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1} - \psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n}{\tau h_2} +$$

$$+ \omega_{i,j-1}^{n+1} \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{4h_1} + \omega_{i,j}^{n+1} \frac{\psi_{i+1,j-1}^n - \psi_{i-1,j-1}^n}{4h_1} + \nu \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j-1}^{n+1}}{h_2}, \quad (47)$$

$$\left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} + \omega \frac{\partial \psi}{\partial y} - \nu \frac{\partial \omega}{\partial x} - \beta g \theta \right)_{i+1/2,j}^{n+1} \approx -\frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i+1,j}^n + \psi_{i,j}^n}{\tau h_1} +$$

$$+ \omega_{i+1,j}^{n+1} \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n}{4h_2} + \omega_{i,j}^{n+1} \frac{\psi_{i+1,j+1}^n - \psi_{i+1,j-1}^n}{4h_2} - \nu \frac{\omega_{i+1,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1}}{h_1} - \beta g \frac{\theta_{i,j}^{n+1} + \theta_{i+1,j}^{n+1}}{2}. \quad (48)$$

Для вычисления интеграла (13) применяется квадратурная формула средних прямоугольников по выбранному контуру γ_1 и формулы (47), (48). Полученное в результате разностное соотношение аппроксимирует интегральное условие (13) с погрешностью $O(\tau + h_1^2 + h_2^2)$. Для решения разностных задач, получаемых из (37)–(42) в соответствии с алгоритмом п. 1, применяется итерационный метод переменных направлений [8]. Системы сеточных уравнений решаются методом векторной прогонки. Системы разностных уравнений (43), (45) и (44), (46) реализуются методом скалярной прогонки.

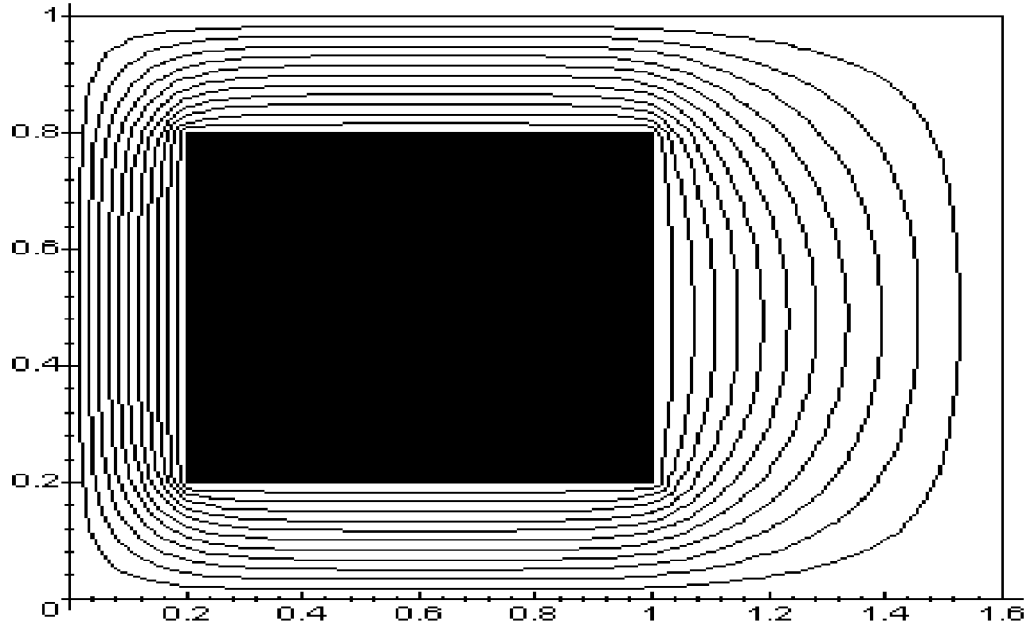


Рис. 1. Изотермы. Размер полости 1.6×1.0 , размер блока 0.8×0.6 , температура внешней границы $\theta = 0$, внутренней границы $\theta = 1$, $Gr = 100$, $Pr = 5.39$, $t = 0.1$.

В качестве результатов расчетов представлены распределения температуры, функции тока и завихренности в области течения. Результаты получены для различных конфигураций полости, температурных режимов на границе и значений определяющих течение безразмерных параметров – числах Грасгофа Gr и Прандтля Pr . Во всех расчетах использовалась пространственная разностная сетка размером 41×41 узлов, шаг по времени $\tau = 0.001$. Расчеты заканчивались при значении безразмерного времени $t = 0.1$, что соответствует установлению значения функции тока $\lambda_1(t)$ на внутренней границе Γ_1 .

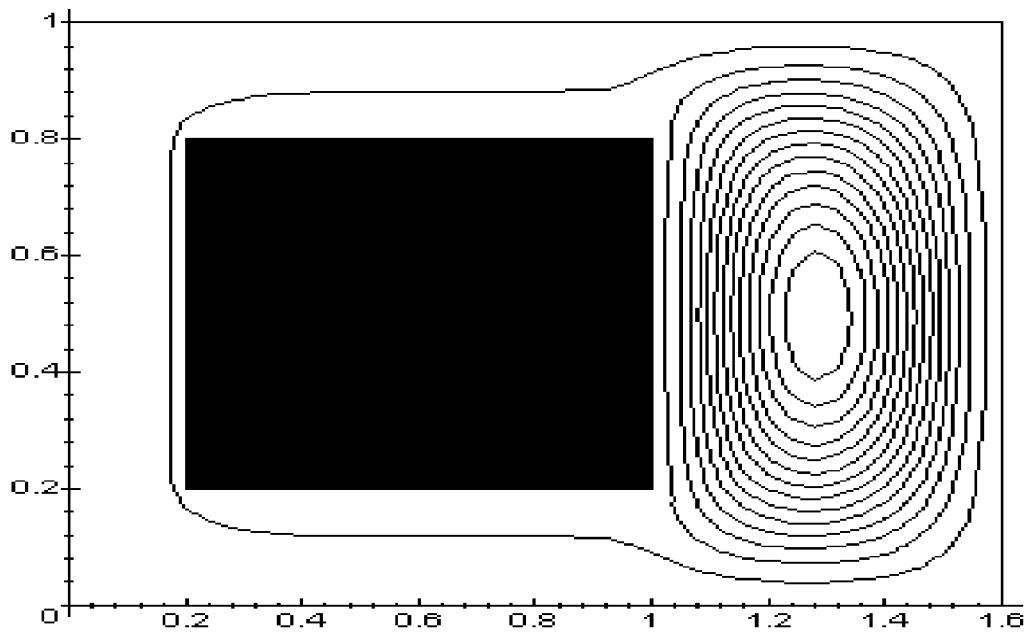


Рис. 2. Линии тока. Размер полости 1.6×1.0 , размер блока 0.8×0.6 , температура внешней границы $\theta = 0$, внутренней границы $\theta = 1$, $Gr = 100$, $Pr = 5.39$, $t = 0.1$.

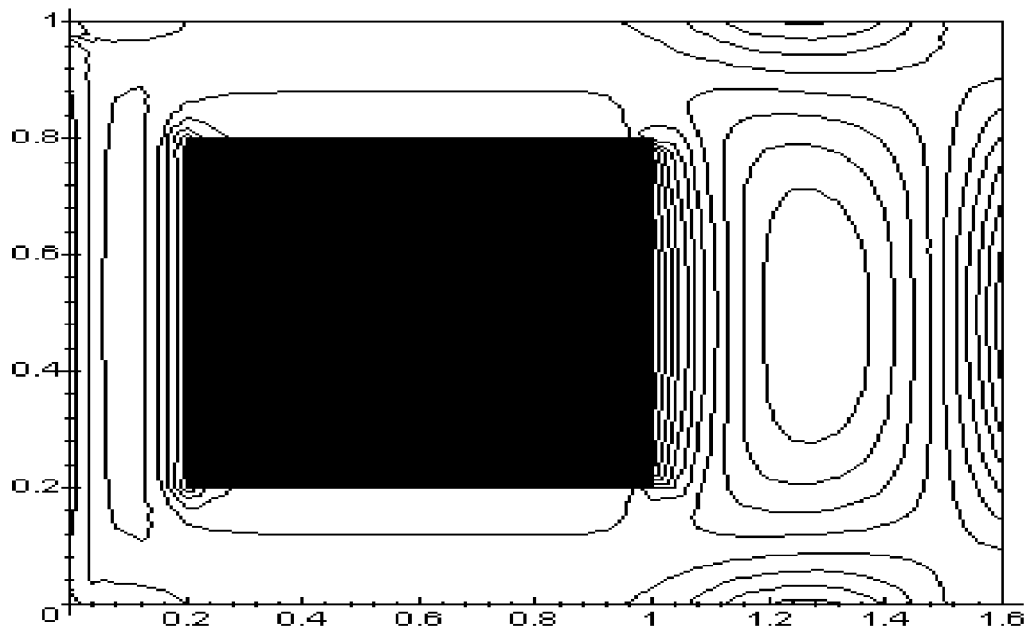


Рис. 3. Линии равной завихренности. Размер полости 1.6×1.0 , размер блока 0.8×0.6 , температура внешней границы $\theta = 0$, внутренней границы $\theta = 1$, $Gr = 100$, $Pr = 5.39$, $t = 0.1$.

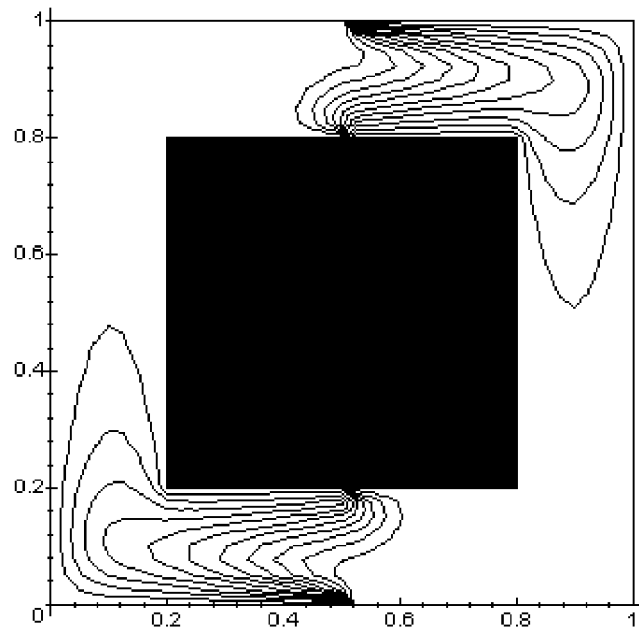


Рис. 4. Изотермы. Размер полости 1.0×1.0 , размер блока 0.6×0.6 , температура правых частей границ $\theta = 0.5$, левых частей $\theta = -0.5$, $Pr = 5.39$, $Ra = 10^6$, $t = 0.1$.

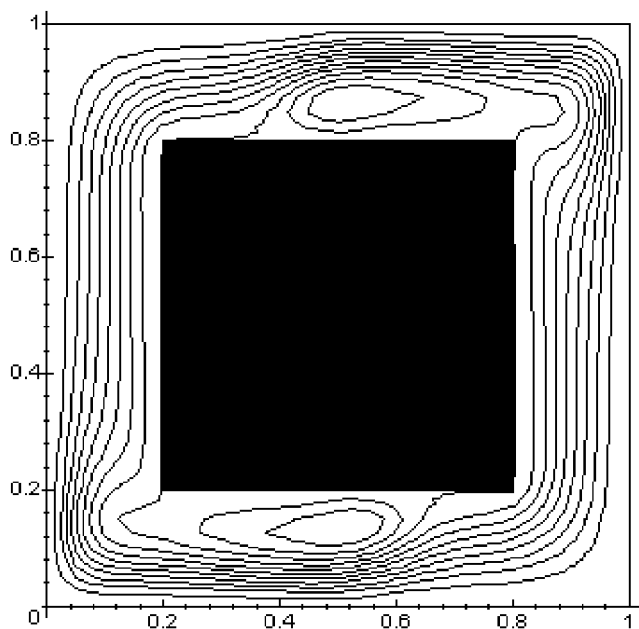


Рис. 5. Линии тока. Размер полости 1.0×1.0 , размер блока 0.6×0.6 , температура правых частей границ $\theta = 0.5$, левых частей $\theta = -0.5$, $Pr = 5.39$, $Ra = 10^6$, $t = 0.1$.

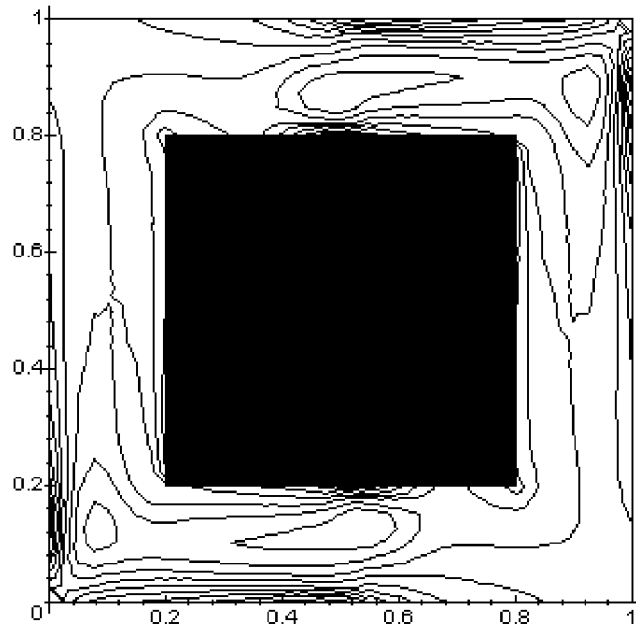


Рис. 6. Линии равной завихренности. Размер полости 1.0×1.0 , размер блока 0.6×0.6 , температура правых частей границ $\theta = 0.5$, левых частей $\theta = -0.5$, $Pr = 5.39$, $Ra = 10^6$, $t = 0.1$.

Характеристики течения в несимметричной полости размером 1.6×1.0 с внешней границей при температуре $\theta = 0$ и смещенным влево от центра нагретым блоком с температурой $\theta = 1$ на конечный момент времени $t = 0.1$ изображены на рис. 1–3. Результаты получены для $Gr = 100$, $Pr = 5.39$. Здесь течение быстро устанавливается, и распределения всех рассчитанных величин имеют четко выраженную симметрию относительно средней горизонтальной линии.

На рис. 4–6 представлены результаты для квадратной полости с симметрично расположенным квадратным блоком. Температура на правых частях внешней и внутренней границ задавалась равной $\theta = 0.5$, на левых частях границ $\theta = -0.5$. Расчеты проведены для значений безразмерных параметров: число Прандтля $Pr = 5.39$, число Рэлея $Ra = Gr Pr = 10^6$.

Список литературы

- [1] Кузнецов Б.Г., Сироченко В. П. О постановке задач гидродинамики в многосвязных областях // Вычислит. технологии: Сб. научн. трудов. Новосибирск: ИВТ СО РАН. 1995. Т. 4, № 12. С. 209–218.
- [2] Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Теоретическая физика: В 10-ти т. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
- [3] Лойцянский Л. В. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.
- [4] МАТЕМАТИЧЕСКОЕ моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье—Стокса / В.И. Полежаев, А.В. Бунэ, Н.А. Верезуб и др. М.: Наука, 1987.
- [5] Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984.
- [6] Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
- [7] Юдович В. И. Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1963. Т. 3, № 6. С. 1032–1066.
- [8] Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
- [9] ADLAM J. H. Computation of two-dimensional time-dependent natural convection in a cavity where there are internal bodies. Computers & Fluids. 1986. Vol. 14, № 2. P. 141–157.
- [10] RICHARDS C. W., CRANE C. M. Pressure marching schemes that work // Inter. J. Numer. Meth. Eng. 1980. Vol. 15. P. 599–610.