

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕЖКОТЛОВИННОГО ТЕПЛО-МАССООБМЕНА В ОЗЕРЕ

Е. А. ЦВЕТОВА

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск, Россия*

A 3D numerical model of hydrodynamics is used for studying the heat and mass exchange between the parts of a small lake. The horizontal and vertical movements of different scales are generated in the lake forced by wind and density stratification in the region with complex topography. The main feature is internal seiche, that exists in the thermocline. It works as a pump that moves water from one part of the lake to another one via shallow channel.

Проблема рекреации земель, ранее использованных для открытых разработок полезных ископаемых, имеет важное прикладное значение. Одним из способов решения этой проблемы может быть заполнение отработанных карьеров водой. В образующихся в результате этого искусственных водоемах, в зависимости от экологических условий, возможно проведение различного рода хозяйственной деятельности. Поэтому для каждого конкретного водоема в первую очередь ставятся вопросы оценки и прогноза качества воды. Но для получения таких оценок сначала необходимо иметь представление о характере движений, которые будут возникать в водоеме под воздействием различных естественных и антропогенных факторов. Специфической особенностью таких искусственных водоемов является их сложная конфигурация. Зачастую водоем составляется из нескольких карьеров, соединенных между собой каналами. В зависимости от конфигурации этих каналов, их глубины и ширины, водообмен между отдельными котловинами может быть более или менее интенсивным, в связи с чем в разных котловинах могут сформироваться различные гидротермодинамические условия, а следовательно, и качество воды в них может существенно различаться.

Для решения широкого класса задач экологического прогнозирования и проектирования, возникающих в таких исследованиях, предлагается использовать комплекс математических моделей различной степени сложности [3, 7]. В данной работе описывается применение одной из моделей для изучения конкретной проблемы — водообмена в искусственном водоеме Goitschisee в Германии.

1. Математическая модель

Три основные гипотезы положены в основу математической модели: несжимаемость воды, гидростатика и приближение Буссинеска. Система уравнений имеет вид:

$$\frac{du}{dt} - lv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} A \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dt} + lu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} A \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} A \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = g\rho, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} \nu_1 \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial T}{\partial y} + q, \quad (5)$$

$$\rho = \rho(p, T, S_0). \quad (6)$$

Здесь u, v, w — компоненты вектора скорости в направлениях x, y , and z соответственно. Они положительны на восток, север и вниз, g — ускорение свободного падения, p — давление, ρ — плотность, ρ_0 —

*Работа поддержана грантами РФФИ 00-15-98543 и 01-05-65313.

© Е. А. Цветова, 2001.

относительная плотность, A, ν, μ, ν_1 — коэффициенты турбулентности в горизонтальных и вертикальном направлениях, T — температура, q — источник, описывающий объемное поглощение тепла в водной толще, S_0 — заданное среднее значение солености, d/dt — оператор полной производной. Параметр Кориолиса l предполагается постоянным. Граничные условия зависят от конкретной проблемы. В данном случае, на поверхности водоема, задаются:

кинематическое условие на свободной поверхности и напряжение ветра

$$w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y}; \quad \nu \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\tau_x}{\rho_0}, \quad \nu \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\tau_y}{\rho_0}, \quad (7)$$

где τ_x, τ_y есть компоненты касательного напряжения в направлениях x и y соответственно; непрерывность давления через поверхность раздела вода-воздух и поток тепла на поверхности

$$p = p_a; \quad \nu_1 \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{Q}{\rho_0 c_p}. \quad (8)$$

На дне, $z = H(x, y)$, задаются условия отсутствия потока тепла и прилипания для скоростей $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, $\partial T / \partial N = 0$.

На боковых границах

$$u = 0, v = 0, \frac{\partial T}{\partial N} = 0. \quad (9)$$

Здесь $\partial / \partial N$ есть производная по ко-нормали

$$\frac{\partial}{\partial N} = \mu \cos(n, x) \frac{\partial}{\partial x} + \mu \cos(n, y) \frac{\partial}{\partial y} + \nu_1 \cos(n, z) \frac{\partial}{\partial z}. \quad (10)$$

Начальные условия

$$u = u^0, v = v^0, T = T^0. \quad (11)$$

Уравнение состояния в наиболее общем виде дается в [5], однако в данном случае было использовано более простое соотношение. Для некоторых озер, вода которых имеет специфический состав, уравнение состояния получается путем составления регрессионных зависимостей с использованием натуральных данных.

Вертикальный турбулентный обмен параметризуется, следуя [6]

$$\nu = \begin{cases} (ch)^2 (f)^{1/2} + \nu_0, & \text{при } f > 0, \\ \nu_0, & \text{при } f \leq 0, \end{cases} \quad (12)$$

где

$$f = \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z}. \quad (13)$$

Формула $\nu_1 = \alpha \nu$, где α — константа, используется для коэффициента турбулентности в уравнении для температуры.

Для параметризации горизонтальной диффузии используется следующая формула для коэффициентов

$$A = A_0 + cL^2 \left(2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad (14)$$

где L — шаг сетки, A_0 и c — константы.

Описание численной реализации из-за ограниченного объема здесь не приводится. Имеет смысл, однако, отметить, что для построения конечно-разностных аппроксимаций используются вариационный принцип в сочетании с методом расщепления [2]. Исходная система уравнений вместе с краевыми и начальными условиями, объединяется в интегральное тождество, которое затем специальным образом дискретизируется, что позволяет построить конечно-разностные аппроксимации с заданными свойствами. Для дискретизации по времени используется идея слабой аппроксимации и метод дробных шагов [4]. Полученные численные схемы обладают свойствами энергетической сбалансированности.

2. Моделирование гидротермодинамического режима в водоеме

Искусственный водоем Goitschisee образован на месте бывших открытых разработок полезных ископаемых. Он будет заполняться пресной водой до проектных отметок в течение нескольких лет по специально построенному водоводу. По мере заполнения конфигурация водоема будет меняться. В численных экспериментах, представленных в настоящей работе, рассматривается промежуточное состояние водоема в 1999 г. В этот период его максимальная глубина была около 38 м, максимальные горизонтальные размеры — порядка 2400 м и 3000 м, максимальная глубина канала, соединяющего две котловины озера — северную и южную, была около 8 м. Для аппроксимации области выбрана равномерная сетка в декартовой системе координат.

Целью численного эксперимента была оценка возможности водообмена между котловинами за счет внутренних колебаний, возникающих в результате отклика водоема на изменяющиеся ветровые воздействия. Численные эксперименты относятся к периоду прямой температурной стратификации. В заданном начальном вертикальном распределении температуры присутствует верхний перемешанный слой, слой термоклина, начинающийся примерно на глубине, равной максимальной глубине канала, и, находящийся ниже термоклина, слой с практически постоянной температурой. На рис. 1 приведено начальное распределение температуры на вертикальном сечении вдоль тальвега озера. Эксперимент начинался с воздействия постоянного в течении суток ветра, дующего с юга со скоростью 5 м/с. Так как водоем замкнут, в области

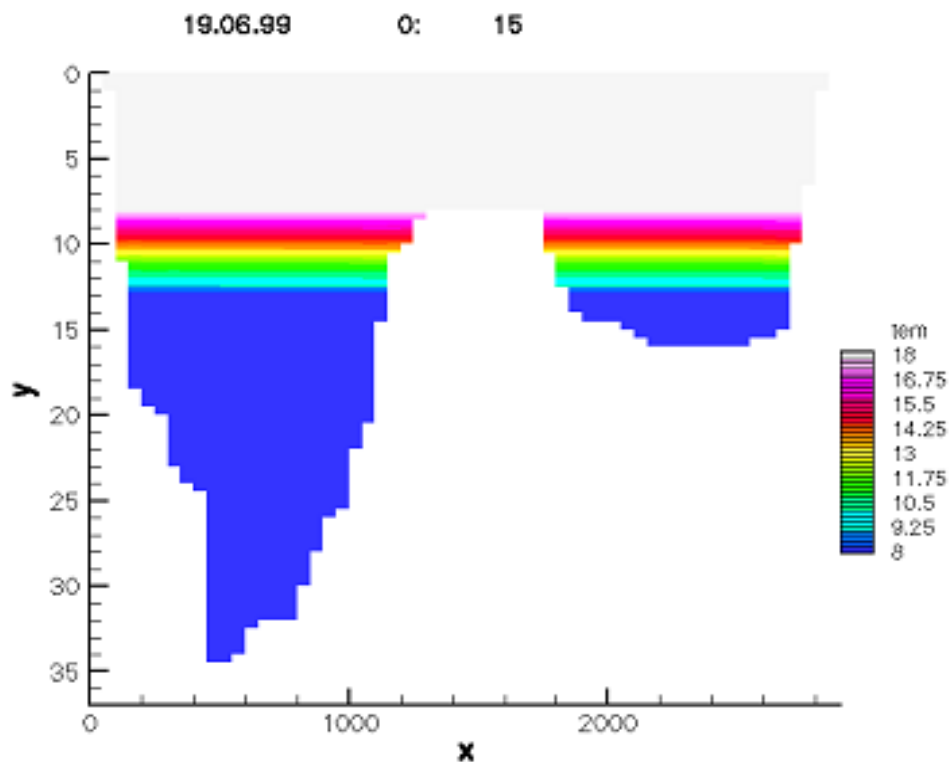


Рис. 1. Распределение температуры в град.С вдоль тальвега. Начало эксперимента.

возникал нагон поверхностных вод к северным берегам обеих частей озера, что приводило к опусканию вод около северных берегов и подъему у южных (рис. 2). В это время слой термоклина двигался в вертикальной плоскости в противофазе к движениям перемешанного слоя. По истечению суток воздействие ветра прекращалось и в озере возникали компенсационные течения и внутренние колебания. Поскольку и конфигурация котловин и их глубины различны, и, кроме того, они соединены между собой каналом, все движения в водоеме представляли собой сложные комбинации различных процессов (рис. 3). Горизонтальные циркуляции проявляли сложное поведение, в котором очевидно сказывалось влияние канала. В обеих частях образовывались крупномасштабные течения спиралевидной структуры, закручивающейся по часовой стрелке. Водообмен через канал осуществлялся в обоих направлениях. Часто вертикальная структура течений в канале была слоистой. На фрагменте компьютерной анимации, приведенной на рис. 4, видно проникновение вод южной котловины в северную, что позволяет сделать вывод о том, что водообмен между котловинами за счет внутренних колебаний возможен.

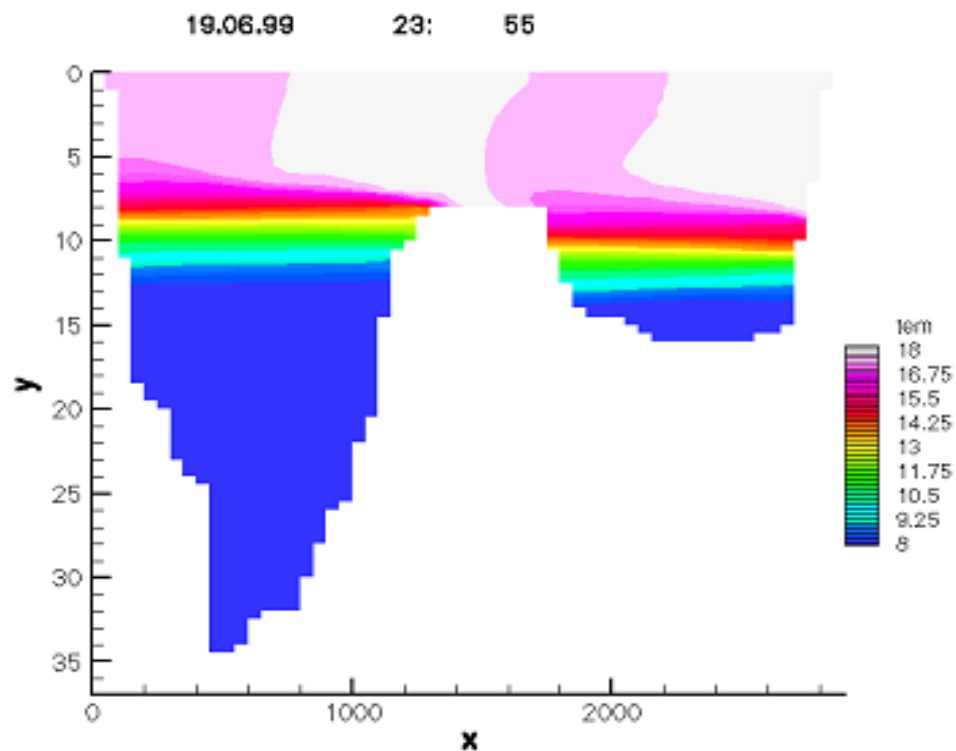


Рис. 2. То же, что и на рис. 1, но в момент окончания воздействия ветра.

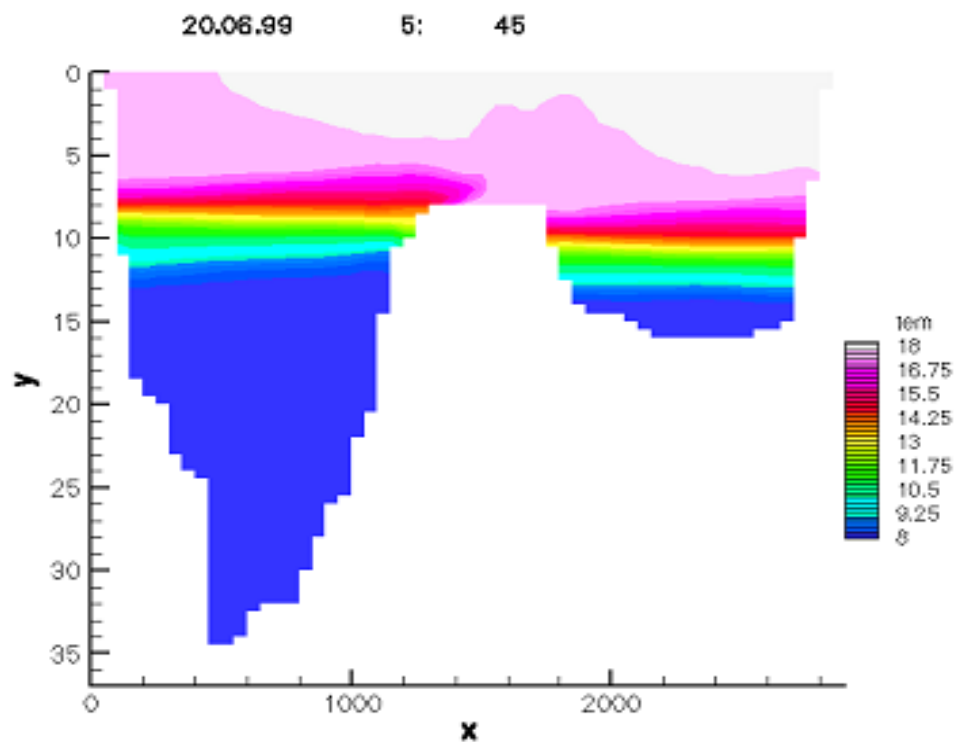


Рис. 3. То же, что и на рис. 1, но в момент времени, указанный наверху рисунка.

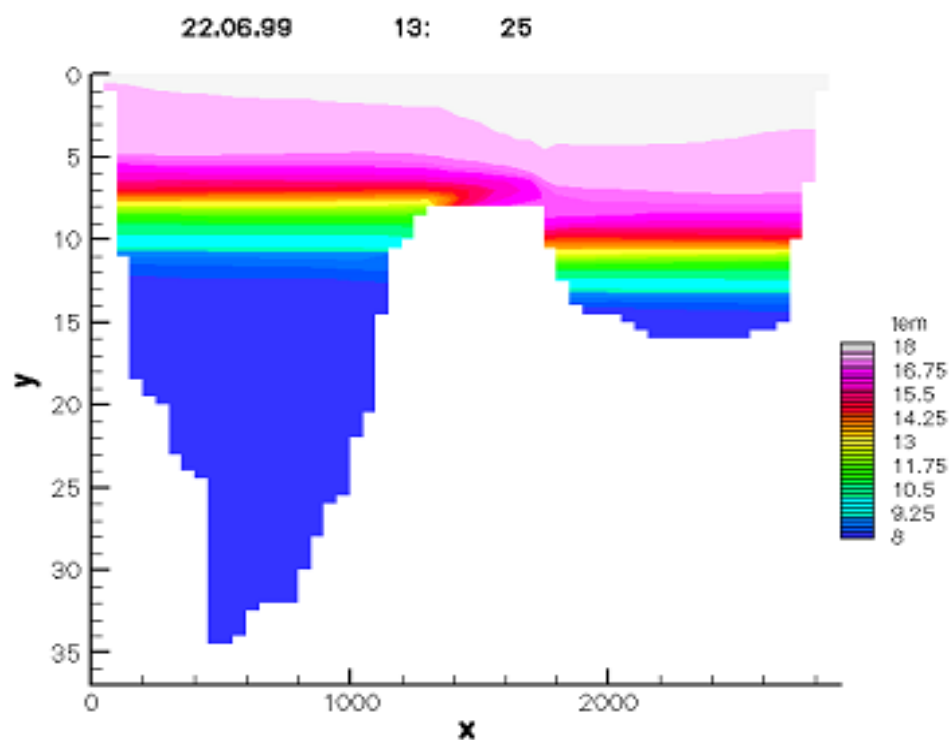


Рис. 4. То же, что и на рис. 1, но в момент времени, указанный наверху рисунка.

Автор выражает благодарность своим немецким коллегам Э. Бойерле и Б. Боереру за участие в постановке задачи и обсуждении результатов, а также за предоставление натуральных данных.

Список литературы

- [1] МАРЧУК Г.И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Л.: Гидрометеиздат, 1974.
- [2] ПЕНЕНКО В.В. Методы численного моделирования атмосферных процессов. Л.: Гидрометеиздат, 1981.
- [3] ЦВЕТОВА Е.А. Численное моделирование гидродинамических процессов, ответственных за распространение загрязняющих примесей в глубоком водоеме // Вычислит. технологии. 1997. Т. 2, № 2. С. 102–108.
- [4] ЯНЕНКО Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
- [5] CHEN G.T., MILLERO F.J. Precise thermodynamic properties for natural waters covering only the limnological range, *Limnol. Oceanogr.* 1986. Vol. 31. P. 657–662.
- [6] MARCHUK G.I., KOCHERGIN V.P., KLIMOK V.I., SUKCHORUKOV V.A. On the dynamics of the ocean surface mixed layer // *J. Phys. Oceanogr.* 1977. Vol. 7. P. 865–875.
- [7] TSVETOVA E.A. Mathematical modeling of Lake Baikal hydrodynamics // *Hydrobiologia.* 1999. Vol. 407. P. 310–320.