ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

С.В. АГАФОНЦЕВ

Томский государственный университет, Россия

e-mail: fire@fire.tsu.tomsk

1. Постановка задачи

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$K(x)\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\cdot\frac{dy}{dx}-Q(x)\cdot y+F(x)=0,\ \ x\in(0,1), \tag{1}$$

с граничными условиями третьего рода

$$\begin{aligned}\alpha_0\cdot y(0)+\beta_0\cdot\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}&=\delta_0,\\ \alpha_1\cdot y(1)+\beta_1\cdot\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}&=\delta_1.\end{aligned} \tag{2}$$

Ограничением на функции уравнения является требование их непрерывности. Естественно необходимо, чтобы $K(x)\neq 0$ и для единственности решения α_0 или α_1 не было равно нулю. Если задача поставлена на отрезке $[a,b]$, то, сделав простую замену $t=\dfrac{x-a}{b-a}$, можно перейти к переменной $t\in[0,1]$.

Во многих практических задачах этого типа, описывающих математические модели диффузионно–конвективных процессов или родственных физических явлений, коэффициент диффузионного члена *K(x)* мал по сравнению с коэффициентом конвективного члена *P(x)* и/или другими слагаемыми уравнения. Примерами могут служить задачи о переносе тепла с большими числами Пекле, о течениях Навье–Стокса с большими числами Рейнольдса и задачи магнитной гидродинамики с большими числами Хартмана. Решение этих задач может быстро изменяться вблизи граничных точек, т.е. мы имеем пограничный слой [1, 2].

При решении таких задач стандартными численными методами возникают большие трудности из–за отсутствия аппроксимации исходного уравнения, погрешность аппроксимации которых (например, метода баланса [1]) равна

$$r\ =\ const\cdot\ u(4)(x)\cdot\ h2. \tag{3}$$

Рассмотрим пример, иллюстрирующий возможный тип поведения решений двухточечных краевых задач с малым параметром:

$$\begin{aligned}&\varepsilon\cdot u''(x)+u'(x)=0,\ \ 0<x<1,\\ &u(0)=0,\ \ u(1)=1.\end{aligned}$$

Решением этой задачи является функция $u(x)=\dfrac{1-\mathbf{exp}(-x/\varepsilon)}{1-\mathbf{exp}(-1/\varepsilon)}$.

Для получения значения погрешности аппроксимации найдем четвертую производную от этого решения:

$$u^{(4)}(x)=\frac{-{}^{1}\!/\!{}_{\varepsilon^4}\cdot\mathbf{exp}(-x/\varepsilon)}{1-\mathbf{exp}(-1/\varepsilon)}.$$

Подставим это значение в выражение (3) и найдем погрешность аппроксимации при x=0: $r=\mathrm{const}\cdot h^2/\varepsilon^4$. И если $\varepsilon\approx\sqrt{h}$, то погрешность становится порядка единицы.

2. Построение метода

Для построения разностной схемы на отрезке [0,1] зададим сетку $x_i=h\cdot i$, где $h=1/N$ – шаг сетки, $i=\overline{0,N}$, N –целое. На i–м участке разбиения $(x_i\,,x_{i+1})$ переменные коэффициенты *K(x), P(x), Q(x)* и *F(x)* заменим константами k_i, p_i, q_i и f_i, *близкими*, на этом отрезке, к исходным функциям *K(x), P(x), Q(x)* и *F(x)* соответственно (это могут быть различные замены, например среднее арифметическое коэффициентов на границах отрезка). После замены на каждом отрезке (x_i, x_{i+1}) получим задачу

$$k_i \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + p_i \cdot \frac{dy}{dx} - q_i \cdot y + f_i = 0, \quad x = (x_i, x_{i+1}), \tag{4}$$

$$y(x_i) = y_i, \quad y(x_{i+1}) = y_{i+1} \tag{5}$$

Уравнение (4) – линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, которое имеет аналитическое решение. Вид этого решения зависит от корней λ_1, λ_2 характеристического уравнения $k_i \cdot \lambda^2 + p_i \cdot \lambda - q_i = 0$.

Для примера рассмотрим случай, когда коэффициенты уравнения (4) связаны следующими соотношениями:

$$q_i > {-p_i^2}\Big/{4k_i}, q_i \neq 0 \tag{6}$$

Решение уравнения (4) при условии (6) представляется в виде:

$$y = a_i \cdot e^{\lambda_1^{(i)} x} + b_i \cdot e^{\lambda_2^{(i)} x} + \frac{f_i}{q_i} \tag{7}$$

Коэффициенты *a* и *b* находятся подстановкой (7) в краевые условия (5):

$$\begin{cases} a_i \cdot e^{\lambda_1^{(i)} x_i} + b_i \cdot e^{\lambda_2^{(i)} x_i} = y_i - \dfrac{f_i}{q_i}, \\ a_i \cdot e^{\lambda_1^{(i)} x_{i+1}} + b_i \cdot e^{\lambda_2^{(i)} x_{i+1}} = y_{i+1} - \dfrac{f_i}{q_i}. \end{cases} \tag{8}$$

Решив эту систему относительно *a* и *b,* получим

$$\begin{gathered} a_i = \left[\left(y_{i+1} - \frac{f_i}{q_i} \right) \cdot e^{\lambda_2^{(i)} x_i} - \left(y_i - \frac{f_i}{q_i} \right) \cdot e^{\lambda_2^{(i)} x_{i+1}} \right] \cdot e^{\frac{p_i}{k_i} x_i} \Big/ \left(e^{\lambda_1^{(i)} \Delta x} - e^{\lambda_2^{(i)} \Delta x} \right), \\ b_i = \left[\left(y_i - \frac{f_i}{q_i} \right) \cdot e^{\lambda_1^{(i)} x_{i+1}} - \left(y_{i+1} - \frac{f_i}{q_i} \right) \cdot e^{\lambda_1^{(i)} x_i} \right] \cdot e^{\frac{p_i}{k_i} x_i} \Big/ \left(e^{\lambda_1^{(i)} \Delta x} - e^{\lambda_2^{(i)} \Delta x} \right). \end{gathered} \tag{9}$$

Подставив (9) в (7), получим решение задачи (4), (5) при условии (6). Аналогично находятся решения при других ограничениях на k_i, p_i и q_i (табл.1).

Таблица 1

Точное решение задачи с постоянными коэффициентами

$N^{\underline{0}}$	Условие	Y
1	$q = \dfrac{-p^2}{4k} \neq 0$	$y = (a \cdot x + b) \cdot e^{\frac{-p}{2 \cdot k} \cdot x} + \dfrac{f}{q}$ $a = \dfrac{1}{\Delta x} \left[\left(y_{i+1} - \dfrac{f}{q} \right) \cdot e^{\frac{p}{2 \cdot k} \cdot x_{i+1}} - \left(y_i - \dfrac{f}{q} \right) \cdot e^{\frac{p}{2 \cdot k} \cdot x_i} \right]$ $b = \dfrac{1}{\Delta x} \left[\left(y_i - \dfrac{f}{q} \right) \cdot e^{\frac{p}{2 \cdot k} \cdot x_i} \cdot x_{i+1} - \left(y_{i+1} - \dfrac{f}{q} \right) \cdot e^{\frac{p}{2 \cdot k} \cdot x_{i+1}} \cdot x_i \right]$
2	$q = p = 0$	$y = \dfrac{-f}{2 \cdot k} \cdot x^2 + a \cdot x + b$ $a = \dfrac{1}{\Delta x} [y_{i+1} - y_i] + \dfrac{f}{2 \cdot k} \cdot (x_{i+1} + x_i)$ $b = \dfrac{1}{\Delta x} [y_i \cdot x_{i+1} - y_{i+1} \cdot x_i] - \dfrac{f}{2 \cdot k} x_{i+1} \cdot x_i$

N⁰	Условие	Y
3	$q = 0 \quad p \neq 0$	$y = \frac{-f}{p} x + a + b \cdot e^{\frac{-p}{k} x}$ $a = \frac{y_i \cdot e^{\frac{-p}{k} x_{i+1}} - y_{i+1} \cdot e^{\frac{-p}{k} x_i} + \frac{f}{p}\left(x_i \cdot e^{\frac{-p}{k} x_{i+1}} - x_{i+1} \cdot e^{\frac{-p}{k} x_i} \right)}{e^{\frac{-p}{k} x_{i+1}} - e^{\frac{-p}{k} x_i}}$ $b = \left(y_{i+1} - y_i + \frac{f}{p} \cdot \Delta x \right) \Big/ \left(e^{\frac{-p}{k} x_{i+1}} - e^{\frac{-p}{k} x_{i+1}} \right)$
4	$q > \frac{-p^2}{4k}$	$y = a \cdot e^{\lambda_1 x} + b \cdot e^{\lambda_2 x} + \frac{f}{q}$,где $\lambda_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4 \cdot k \cdot q}}{2 \cdot k}$ $a = \left[\left(y_{i+1} - \frac{f}{q} \right) \cdot e^{\lambda_2 x_i} - \left(y_i - \frac{f}{q} \right) \cdot e^{\lambda_2 x_{i+1}} \right] \cdot e^{\frac{p}{k} x_i} \Big/ \left(e^{\lambda_1 \Delta x} - e^{\lambda_2 \Delta x} \right)$ $b = \left[\left(y_i - \frac{f}{q} \right) \cdot e^{\lambda_1 x_{i+1}} - \left(y_{i+1} - \frac{f}{q} \right) \cdot e^{\lambda_1 x_i} \right] \cdot e^{\frac{p}{k} x_i} \Big/ \left(e^{\lambda_1 \Delta x} - e^{\lambda_2 \Delta x} \right)$
5	$q < \frac{-p^2}{4k}$	$y = e^{\frac{-p}{2 \cdot k} x} \left(a \cdot \mathbf{sin}(\alpha \cdot x) + b \cdot \mathbf{cos}(\alpha \cdot x) \right) + \frac{f}{q}$, где $\alpha = \frac{\sqrt{-4 \cdot k \cdot q - p^2}}{2 \cdot k}$ $a = \frac{\left(y_{i+1} - \frac{f}{q} \right) e^{\frac{p}{2 \cdot k} x_{i+1}} \mathbf{cos}(\alpha x_i) - \left(y_i - \frac{f}{q} \right) e^{\frac{p}{2 \cdot k} x_i} \mathbf{cos}(\alpha x_{i+1})}{\mathbf{sin}(\alpha \Delta x)}$ $b = \frac{\left(y_i - \frac{f}{q} \right) e^{\frac{p}{2 \cdot k} x_i} \mathbf{sin}(\alpha x_{i+1}) - \left(y_{i+1} - \frac{f}{q} \right) e^{\frac{p}{2 \cdot k} x_{i+1}} \mathbf{cos}(\alpha x_i)}{\mathbf{sin}(\alpha \Delta x)}$

Для получения разностной схемы потребуем непрерывности полученных решений и их производной на всем отрезке [0, 1], поскольку полученные решения являются непрерывно дифференцируемыми функциями на отрезках (x_i, x_{i+1}). Остается обеспечить выполнение этого условия в узлах сетки x_i. Непрерывность $y(x)$ выполняется автоматически из–за граничных условий (5). Приравняем производные слева и справа в узлах сетки x_i. Так как решение (4), (5) получено в аналитическом виде, то производная от него находится простым дифференцированием. Для случая (6)

$$y' = a_i \cdot \lambda_1^{(i)} \cdot e^{\lambda_1^{(i)} x} + b \cdot \lambda_2^{(i)} \cdot e^{\lambda_2^{(i)} x}.$$

Введем обозначения:

$$l_i^- = y'(x_i)\big|_{x_i \in [x_{i-1}, x_i]}, \quad l_i^+ = y'(x_i)\big|_{x_i \in [x_i, x_{i+1}]}. \tag{10}$$

Непрерывность производных тогда запишется в виде

$$l_i^- = l_i^+. \tag{11}$$

Найдем l_i^- и l_i^+ при условии (6).

$$l_i^+ = a_i \cdot \lambda_1^{(i)} \cdot e^{\lambda_1^{(i)} x_i} + b_i \cdot \lambda_2^{(i)} \cdot e^{\lambda_2^{(i)} x_i} =$$

$$= \left[\left(y_{i+1} - \frac{f_i}{q_i} \right) \cdot e^{\lambda_2^{(i)} x_i} - \left(y_i - \frac{f_i}{q_i} \right) \cdot e^{\lambda_2^{(i)} x_{i+1}} \right] \cdot e^{\frac{p_i}{k_i} x_i} \Big/ \left(e^{\lambda_1^{(i)} \Delta x} - e^{\lambda_2^{(i)} \Delta x} \right) \cdot \lambda_1^{(i)} \cdot e^{\lambda_1^{(i)} x_i} +$$

$$+\left[\left(y_i-\frac{f_i}{q_i}\right)\cdot e^{\lambda_1^{(i)}x_{i+1}}-\left(y_{i+1}-\frac{f_i}{q_i}\right)\cdot e^{\lambda_1^{(i)}x_i}\right]\cdot e^{\frac{p_i}{k_i}x_i}\Big/\left(e^{\lambda_1^{(i)}\Delta x}-e^{\lambda_2^{(i)}\Delta x}\right)\cdot\lambda_2^{(i)}\cdot e^{\lambda_2^{(i)}x_i}=$$

$$=\frac{\left(y_{i+1}-\frac{f_i}{q_i}\right)\cdot\left(\lambda_2^{(i)}-\lambda_1^{(i)}\right)+\left(y_i-\frac{f_i}{q_i}\right)\cdot\left(\lambda_1^{(i)}\cdot e^{\lambda_2^{(i)}\cdot\Delta x}-\lambda_2^{(i)}\cdot e^{\lambda_1^{(i)}\cdot\Delta x}\right)}{e^{\lambda_2^{(i)}\cdot\Delta x}-e^{\lambda_1^{(i)}\cdot\Delta x}},$$

$$l_i^-=a_{i-1}\cdot\lambda_1^{(i-1)}\cdot e^{\lambda_1^{(i-1)}x_i}+b_{i-1}\cdot\lambda_2^{(i-1)}\cdot e^{\lambda_2^{(i-1)}x_i}=$$

$$=\left[\left(y_i-\frac{f_{i-1}}{q_{i-1}}\right)e^{\lambda_2^{(i-1)}x_{i-1}}-\left(y_{i-1}-\frac{f_{i-1}}{q_{i-1}}\right)e^{\lambda_2^{(i-1)}x_i}\right]e^{\frac{p_{i-1}}{k_{i-1}}x_{i-1}}\Big/\left(e^{\lambda_1^{(i-1)}\Delta x}-e^{\lambda_2^{(i-1)}\Delta x}\right)\lambda_1^{(i-1)}e^{\lambda_1^{(i-1)}x_i}+$$

$$+\left[\left(y_{i-1}-\frac{f_{i-1}}{q_{i-1}}\right)e^{\lambda_1^{(i-1)}x_i}-\left(y_i-\frac{f_{i-1}}{q_{i-1}}\right)e^{\lambda_1^{(i-1)}x_{i-1}}\right]e^{\frac{p_{i-1}}{k_{i-1}}x_{i-1}}\Big/\left(e^{\lambda_1^{(i-1)}\Delta x}-e^{\lambda_2^{(i-1)}\Delta x}\right)\lambda_2^{(i-1)}e^{\lambda_2^{(i-1)}x_i}=$$

$$=\frac{\left(y_{i-1}-\frac{f_{i-1}}{q_{i-1}}\right)\cdot\left(\lambda_2^{(i-1)}-\lambda_1^{(i-1)}\right)+\left(y_i-\frac{f_{i-1}}{q_{i-1}}\right)\cdot\left(\lambda_1^{(i-1)}\cdot e^{-\lambda_2^{(i-1)}\cdot\Delta x}-\lambda_2^{(i-1)}\cdot e^{-\lambda_1^{(i-1)}\cdot\Delta x}\right)}{e^{-\lambda_2^{(i-1)}\cdot\Delta x}-e^{-\lambda_1^{(i-1)}\cdot\Delta x}}.$$

Из табл. 2 видно, что все l_i^- и l_i^+ представляются в виде

$$\begin{aligned}l_i^-&=A_i^-\cdot y_{i-1}-C_i^-\cdot y_i-F_i^-,\\ l_i^+&=C_i^+\cdot y_i-B_i^+\cdot y_{i+1}+F_i^+.\end{aligned}\qquad(12)$$

Таблица 2
Значения производных от решения в узлах сетки

Обозначим: $z_i^-=y_i-\dfrac{f_{i-1}}{q_{i-1}}$, $z_i^+=y_i-\dfrac{f_i}{q_i}$.

N^0	Условие	l_i^- и l_i^+
1	$q=\dfrac{-p^2}{4k}\neq 0$	$l_i^-=\left(\dfrac{1}{\Delta x}-\dfrac{p_{i-1}}{2\cdot k_{i-1}}\right)\cdot z_i^- -\dfrac{1}{\Delta x}e^{\frac{-p_{i-1}}{2\cdot k_{i-1}}\Delta x}\cdot z_{i-1}^+$ $l_i^+=\left(\dfrac{-1}{\Delta x}-\dfrac{p_i}{2\cdot k_i}\right)\cdot z_i^+ +\dfrac{1}{\Delta x}e^{\frac{p_i}{2\cdot k_i}\Delta x}\cdot z_{i+1}^-$
2	$q=p=0$	$l_i^-=\dfrac{1}{\Delta x}\left(z_i^- - z_{i-1}^+\right)-\dfrac{f_{i-1}}{2\cdot k_{i-1}}\cdot\Delta x$ $l_i^+=\dfrac{1}{\Delta x}\left(z_{i+1}^- - z_i^+\right)+\dfrac{f_i}{2\cdot k_i}\cdot\Delta x$
3	$q=0$ $p\neq 0$	$l_i^-=\dfrac{p_{i-1}}{k_{i-1}}\cdot\left(z_i^- - z_{i-1}^+ +\dfrac{f_{i-1}}{p_{i-1}}\cdot\Delta x\right)\Big/\left(e^{\frac{p_{i-1}}{k_{i-1}}\cdot\Delta x}-1\right)-\dfrac{f_{i-1}}{p_{i-1}}$ $l_i^+=\dfrac{p_i}{k_i}\cdot\left(z_{i+1}^- - z_i^+ +\dfrac{f_i}{p_i}\cdot\Delta x\right)\Big/\left(1-e^{-\frac{p_i}{k_i}\cdot\Delta x}\right)-\dfrac{f_i}{p_i}$

$N^{\underline{0}}$	Условие	l_i^- и l_i^+
4	$q > \dfrac{-p^2}{4k}$	$l_i^- = \dfrac{z_{i-1}^+\left(\lambda_2^{(i-1)} - \lambda_1^{(i-1)}\right) + z_i^-\left(\lambda_1^{(i-1)} \cdot e^{-\lambda_2^{(i-1)}\cdot\Delta x} - \lambda_2^{(i-1)} \cdot e^{-\lambda_1^{(i-1)}\cdot\Delta x}\right)}{e^{-\lambda_2^{(i-1)}\cdot\Delta x} - e^{-\lambda_1^{(i-1)}\cdot\Delta x}}$ $l_i^+ = \dfrac{z_{i+1}^-\left(\lambda_2^{(i)} - \lambda_1^{(i)}\right) + z_i^+\left(\lambda_1^{(i)} \cdot e^{\lambda_2^{(i)}\cdot\Delta x} - \lambda_2^{(i)} \cdot e^{\lambda_1^{(i)}\cdot\Delta x}\right)}{e^{\lambda_2^{(i)}\cdot\Delta x} - e^{\lambda_1^{(i)}\cdot\Delta x}}$, где $\lambda_{1,2}^{(i)} = \dfrac{-p_i \pm \sqrt{p_i^2 + 4\cdot k_i \cdot q_i}}{2\cdot k_i}$
5	$q < \dfrac{-p^2}{4k}$	$l_i^- = \left(\alpha_{i-1}\cdot ctg\left(\alpha_{i-1}\cdot\Delta x\right) - \dfrac{p_{i-1}}{2\cdot k_{i-1}}\right)\cdot z_i^- - \dfrac{\alpha_{i-1}}{\mathbf{sin}(\alpha_{i-1}\Delta x)}\cdot e^{\frac{-p_{i-1}}{2\cdot k_{i-1}}\Delta x}\cdot z_{i-1}^+$ $l_i^+ = \left(-\alpha_i\cdot ctg\left(\alpha_i\cdot\Delta x\right) - \dfrac{p_i}{2\cdot k_i}\right)\cdot z_i^+ - \dfrac{-\alpha_i}{\mathbf{sin}(\alpha_i)}\cdot e^{\frac{p_i}{2\cdot k_i}\Delta x}\cdot z_{i+1}^-$, где $\alpha_i = \dfrac{\sqrt{-4\cdot k_i\cdot q_i - p_i^2}}{2\cdot k_i}$

После подстановки (12) в (11) получим

$$A_i^- \cdot y_{i-1} - \left(C_i^- + C_i^+\right)\cdot y_i + B_i^+ \cdot y_{i+1} - \left(F_i^- + F_i^+\right) = 0$$

$$\text{или } A_i \cdot y_{i-1} - C_i \cdot y_i + B_i \cdot y_{i+1} - F_i = 0. \tag{13}$$

Причем A_i ,C_i ,B_i и F_i –константы.

Уравнения (12) справедливы для всех внутренних точек x_i , $i = \overline{1, N-1}$. Получена система N–1 линейных алгебраических уравнений (13) относительно неизвестных y_i , $i = \overline{0, N}$. Для полноты этой системы добавим граничные условия (2), которые примут вид:

$$\begin{cases} \alpha_0 \cdot y_0 + \beta_0 \cdot l_0^+ = \delta_0 \\ \alpha_1 \cdot y_N + \beta_1 \cdot l_N^- = \delta_1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \alpha_0 \cdot y_0 + \beta_0 \cdot \left(C_0^+ \cdot y_0 - B_0^+ \cdot y_1 + F_0^+\right) = \delta_0 \\ \alpha_1 \cdot y_N + \beta_1 \cdot \left(A_N^- \cdot y_{N-1} - C_N^- \cdot y_N - F_N^-\right) = \delta_1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} y_0 - \dfrac{\beta_0 \cdot B_0^+}{\alpha_0 + \beta_0 \cdot C_0^+}\cdot y_1 = \dfrac{\delta_0 - \beta_0 \cdot F_0^+}{\alpha_0 + \beta_0 \cdot C_0^+} \\ y_N + \dfrac{\beta_1 \cdot A_N^-}{\alpha_1 - \beta_1 \cdot C_N^-}\cdot y_{N-1} = \dfrac{\delta_{\cdot} + \beta_1 \cdot F_N^-}{\alpha_1 - \beta_1 \cdot C_N^-} \end{cases}. \tag{14}$$

Полученная трехдиагональная система (13), (14) разрешается методом скалярной прогонки.

Теоретическая погрешность аппроксимации этой схемы в общем случае имеет второй порядок, что согласуется с практическими результатами [3].

Оценим порядок величин входящих в (13). Для примера выпишем условие равенства производных, когда справа и слева от точки выполняются условия третьего случая ($q = 0$, $p \neq 0$), и приведем полученное уравнение к виду (12):

$$y_{i-1}\cdot\frac{p_{i-1}}{k_{i-1}}\Bigg/\left(e^{\frac{p_{i-1}}{k_{i-1}}\cdot\Delta x}-1\right)-y_i\cdot\left[\frac{p_{i-1}}{k_{i-1}}\Bigg/\left(e^{\frac{p_{i-1}}{k_{i-1}}\cdot\Delta x}-1\right)+\frac{p_i}{k_i}\Bigg/\left(1-e^{-\frac{p_i}{k_i}\cdot\Delta x}\right)\right]+$$
$$+y_{i+1}\cdot\frac{p_i}{k_i}\Bigg/\left(1-e^{-\frac{p_i}{k_i}\cdot\Delta x}\right)-\Delta x\left[\frac{f_{i-1}}{k_{i-1}}\Bigg/\left(e^{\frac{p_{i-1}}{k_{i-1}}\cdot\Delta x}-1\right)-\frac{f_i}{k_i}\Bigg/\left(1-e^{-\frac{p_i}{k_i}\cdot\Delta x}\right)\right]+\frac{f_{i-1}}{p_{i-1}}-\frac{f_i}{p_i}. \tag{15}$$

Надо сказать, что коэффициент при y_i равен сумме коэффициентов при y_{i-1} и y_{i+1} (это равенство выполняется не при всех случаях, но в придельном случае, при $\Delta x \to 0$ выполняется всегда). Поскольку все эти коэффициенты одного знака, то выполняется условие диагонального преобладания, необходимое для устойчивости прогонки.

Пусть $\frac{p_j}{\kappa_j}\Delta x > 0, j = i, i+1$, тогда $e^{\frac{p_{i-1}}{k_{i-1}}\cdot\Delta x}-1 = M >> 0$, а $1-e^{-\frac{p_i}{k_i}\cdot\Delta x} = m < 1$.

Подставим эти выражения в (15):

$$y_{i-1}\cdot\frac{p_{i-1}}{M\cdot k_{i-1}}-y_i\cdot\left[\frac{p_{i-1}}{M\cdot k_{i-1}}+\frac{p_i}{m\cdot k_i}\right]+y_{i+1}\cdot\frac{p_i}{m\cdot k_i}-\Delta x\left[\frac{f_{i-1}}{M\cdot k_{i-1}}-\frac{f_i}{m\cdot k_i}\right]+\frac{f_{i-1}}{p_{i-1}}-\frac{f_i}{p_i}\approx$$
$$\approx\frac{1}{m}\left(-\frac{p_i}{k_i}y_i+y_{i+1}\cdot\frac{p_i}{k_i}+\frac{f_i}{k_i}\Delta x\right)+\frac{f_{i-1}}{p_{i-1}}-\frac{f_i}{p_i}.$$

Таким образом, при больших значениях p значение в точке зависит больше от значений исходных функций справа, чем слева. При решении задач гидродинамики, p, как правило, имеет смысл скорости потока, и предыдущее утверждение интерпретируется так: значение какого–либо параметра больше зависит от состояния среды с наветренной стороны, чем с подветренной.

3. Об увеличении порядка аппроксимации

При построении разностной схемы коэффициенты $K(x)$, $P(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ не обязательно заменять константами, но при замене их более сложными функциями возникнут сложности с нахождением аналитического решения полученного уравнения. Например, решением уравнения, полученного аппроксимаций этих функций линейными функциями, является функциональный ряд.

Заметим, что при построении схемы ничего не говорилось о способе выбора осреднения функций $K(x)$, $P(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$. Попробуем выбрать значения средних величин функций $K(x)$, $P(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ так, чтобы получить более высокий порядок аппроксимации. Выпишем значение погрешности в i–й точке для простейшего случая $q = p = 0$ на отрезках справа и слева от точки:

$$r = K(x_i)\left(\frac{y^{(4)}(x_i)}{12}\Delta x^2+O\left(\Delta x^4\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{f_{i-1}}{k_{i-1}}-2\frac{F(x_i)}{K(x_i)}+\frac{f_i}{k_i}\right)\right).$$

Для простоты расчетов будем считать, что $K(x) = K = \mathrm{const}$. Это не ограничивает общности, поскольку получается делением уравнения на К(x)/K. Продифференцировав дважды исходное уравнение (1), найдем что $y^{(4)}(x) = -F''(x)\big/K$. Далее, выразив $F''(x_i)$ из выражения $F(x_{i-1})-2F(x_i)+F(x_{i+1}) = \Delta x^2 F''(x_i)+O(\Delta x^4)$, подставим эти значения в уравнение для погрешности аппроксимации. Получим

$$r = \frac{1}{12}\left[6f_{i-1}-F(x_{i-1})-10F(x_i)+6f_i-F(x_{i+1})+O\left(\Delta x^4\right)\right].$$

Теперь, если f_{i-1} и f_i выбрать так, что $f_{i-1} = F(x_{i-1})+5F(x_i)/6$, а $f_i = 5F(x_i)+F(x_{i+1})/6$, удается получить схему четвертого порядка. Точно такой же результат получается, если функцию $F(x)$ аппроксимировать параболическим многочленом, построенным по точкам x_{i-1}, x_i и x_{i+1}. Обратите внимание, что осреднение функции на интервале (x_i, x_{i+1}) будет различным в i–й и i+1–й точках.

Подобным образом повысить порядок аппроксимации в остальных случаях не удается, но можно использовать другие подходы к решению уравнения, сохраняя основную идею метода: получение разностной схемы на основе аналитического решения *близкой* задачи.

Рассмотрим уравнение

$$K\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\cdot\frac{dy}{dx}+F(x)=0,\quad x\in(0,1), \tag{16}$$

которое получено из (1) при предположении, что $Q(x)$=0, а $K(x)$=const.

Оно имеет аналитическое решение вида

$$y=\int_{x_i}^{x}\mathbf{exp}\left(-\int_{x_i}^{x}\frac{P(x)}{K}dx\right)\left(C-\int_{x_i}^{x}\frac{F(x)}{K}\mathbf{exp}\left(\int_{x_i}^{x}\frac{P(x)}{K}dx\right)dx\right)dx+y_i,$$

$$C=\frac{y_i-y_{i-1}-\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\mathbf{exp}\left(-\int_{x_i}^{x}\frac{P(x)}{K}dx\right)\left(\int_{x_i}^{x}\frac{F(x)}{K}\mathbf{exp}\left(\int_{x_i}^{x}\frac{P(x)}{K}dx\right)dx\right)dx}{\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\mathbf{exp}\left(-\int_{x_i}^{x}\frac{P(x)}{K}dx\right)dx}. \tag{17}$$

Нетрудно убедиться, что $l_i^-=y'(x_i)=C$.

Для построения разностной схемы необходимо подсчитать значения интегралов, входящих в выражение для C. Поскольку разрешить интегралы аналитически нельзя, подсчитаем их значение приближенными методами. Причем порядок аппроксимации интегралов будет определять порядок аппроксимации уравнения.

Для нахождения значений интегралов воспользуемся квадратурной формулой Ньютона, построенной по значению функции, ее первой и второй производной в i–й точке

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)dx\approx\left(f_i-\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{4}+\frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{6}\right)\cdot\Delta x=\frac{\Delta x}{12}\left(-f_{i+1}+8f_i+5f_{i-1}\right).$$

С использованием этой формулы, получаем следующие выражения

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\mathbf{exp}\left(-\int_{x_i}^{x}\frac{P(x)}{K}dx\right)dx\approx\frac{\Delta x}{12}\left(\begin{array}{l}-\mathbf{exp}\left(-\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{P(x)}{K}dx\right)+8\,\mathbf{exp}\left(-\int\limits_{x_i}^{x_i}\frac{P(x)}{K}dx\right)+\\ +5\,\mathbf{exp}\left(-\int\limits_{x_i}^{x_{i-1}}\frac{P(x)}{K}dx\right)\end{array}\right)= \tag{18}$$

$$=\frac{\Delta x}{12}\left(-\mathbf{exp}\left(\frac{-\Delta x}{12K}\left(5p_{i+1}+8p_i-p_{i-1}\right)\right)+8+5\,\mathbf{exp}\left(\frac{\Delta x}{12K}\left(5p_{i-1}+8p_i-p_{i+1}\right)\right)\right),$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\mathbf{exp}\left(-\int_{x_i}^{x}\frac{P(x)}{K}dx\right)\left[\int_{x_i}^{x}\frac{F(x)}{K}\mathbf{exp}\left(\int_{x_i}^{x}\frac{P(x)}{K}dx\right)dx\right]dx\approx\ldots=$$

$$=\left(\frac{\Delta x}{12}\right)^2\left(-\frac{8f_i}{K}\left[5\,\mathbf{exp}\left(\frac{\Delta x}{12K}\left(5p_{i-1}+8p_i-p_{i+1}\right)\right)+\mathbf{exp}\left(\frac{-\Delta x}{12K}\left(5p_{i+1}+8p_i-p_{i-1}\right)\right)\right]+\right. \tag{19}$$

$$\left.+\frac{5f_{i+1}}{K}\left[\mathbf{exp}\left(\frac{\Delta x}{3K}\left(p_{i+1}+4p_i+p_{i-1}\right)\right)-1\right]+\frac{f_{i-1}}{K}\left[\mathbf{exp}\left(\frac{-\Delta x}{3K}\left(p_{i-1}+4p_i+p_{i+1}\right)\right)-25\right]\right).$$

Для получения значения производной справа заменим в формулах (17) – (19) Δx на $-\Delta x$ и поменяем местами индексы i+1 и i–1.

Полученная схема имеет также второй порядок аппроксимации, но если функции уравнения имеют большие градиенты, аппроксимирует лучше исходной схемы.

Рассмотрим еще один подход к решению дифференциального уравнения (16). Аппроксимируем функции уравнения (16) параболами:

$$
\begin{gathered}
K\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\left(p_{i+1}-2p_i+p_{i-1}\right)\frac{\left(x-x_i\right)^2}{2}+\frac{p_{i+1}-p_{i-1}}{2}\left(x-x_i\right)+p_i\right)\cdot\frac{dy}{dx}+ \\
+\left(\left(f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}\right)\frac{\left(x-x_i\right)^2}{2}+\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2}\left(x-x_i\right)+f_i\right)=0, \qquad x\in\left(x_{i-1},x_{i+1}\right),
\end{gathered}
\tag{20}
$$

Выражение (17) будет справедливо и в этом частном случае. Чтобы выписать это значение в явном виде, разложим экспоненты, входящие в (17), в ряд Тейлора. Проделав это, после простых преобразований получим

$$
\begin{gathered}
l_i^-=\left[y_i-y_{i-1}-\sum_{a=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{a}\sum_{c=0}^{a-b}\sum_{d=0}^{a-b-c}\sum_{m=0}^{b}\sum_{n=0}^{b-m}\frac{(-1)^{b+d+n}\Delta x^{a+2}}{m!n!(b-m-n)!c!d!(a-b-c-d)!}\times\right. \\
\times\left(\frac{p_{i+1}-2p_i+p_{i-1}}{6K}\right)^{c+m}\left(\frac{p_{i+1}-p_{i-1}}{4K}\right)^{d+n}\left(\frac{p_i}{K}\right)^{a-c-d-m-n}\frac{1}{K}\times \\
\times\left(\frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{2(2m+b+n+3)(2m+2c+a+d+n+4)}-\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2(2m+b+n+2)(2m+2c+a+d+n+3)}+\right. \\
\left.\left.+\frac{f_i}{(2m+b+n+1)(2m+2c+a+d+n+2)}\right)\right]\Bigg/\sum_{a=0}^{\infty}\sum_{c=0}^{a}\sum_{d=0}^{a-c}\frac{(-1)^d\Delta x^{a+1}}{c!d!(a-c-d)!(2c+a+d+1)}\times \\
\times\left(\frac{p_{i+1}-2p_i+p_{i-1}}{6K}\right)^{c}\left(\frac{p_{i+1}-p_{i-1}}{4K}\right)^{d}\left(\frac{p_i}{K}\right)^{a-c-d}.
\end{gathered}
\tag{21}
$$

Производную справа находим аналогичным образом Данная схема имеет четвертый порядок аппроксимации по Δx, а оценка погрешности показывает, что по a достаточно суммировать от 0 до 5 для достижения этого порядка аппроксимации.

Покажем, что для малых K необходимо суммировать большее количество членов. Рассмотрим частный случай: $P(x)$=const. При этом условии выражения для производных упрощаются:

$$
\begin{gathered}
l_i^-=\left[y_i-y_{i-1}-\Delta x^2\sum_{a=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{a}\frac{(-1)^b}{b!(a-b)!}\left(\frac{\Delta x\cdot p_i}{K}\right)^a\frac{1}{K}\left(\frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{2(b+3)(a+4)}-\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2(b+2)(a+3)}+\right.\right. \\
\left.\left.+\frac{f_i}{(b+1)(a+2)}\right)\right]\Bigg/\sum_{a=0}^{\infty}\frac{\Delta x}{(a+1)!}\times\left(\frac{\Delta x\cdot p_i}{K}\right)^a.
\end{gathered}
$$

Видно, что при $\Delta x{\cdot}p_i/K>1$ сходимость рядов обеспечивается лишь наличием факториалов в знаменателе и для достижения заданной погрешности необходимо брать соответствующее количество элементов ряда. С другой стороны, суммирование большего количества слагаемых ведет к увеличению времени счета. Даже при суммировании по а до 5 время счета заметно больше, чем для предыдущих схем.

Как видно из предыдущих выкладок, основная проблема данного подхода к построению разностной схемы состоит в том, что решение однородного уравнения в общем случае не известно. Однако поскольку значение $F(x)$ не входит в выражение для однородного решения, можно улучшить аппроксимацию уравнения за счет увеличения порядка аппроксимации $F(x)$. Если мы хотим, чтобы в уравнение для i–й точки входили значения функции $F(x)$ лишь в i–1–й, i–й и i+1–й точках, $F(x)$ необходимо аппроксимировать параболой, проходящей через эти точки. Алгоритм построения этой схемы полностью совпадает с алгоритмом построения схемы, когда $F(x)$ считалось постоянной на i–м участке разбиения. В табл. 3 приведены полученные выражения производных слева. Для получения значения производной справа можно заменить в формулах Δx на -Δx и поменяем местами индексы i+1 и i–1.

Таблица 3

Значения l_i^- для схемы с параболической правой частью

N⁰	Условие	l_i^-
1	$q=\dfrac{-p^2}{4\cdot k}\neq 0$	$l_i^-=\left(\dfrac{1}{\Delta x}-\dfrac{p_{i-1}}{2}\right)\cdot\left(y_i-\dfrac{F_i}{q_{i-1}}-\dfrac{p_{i-1}}{q_{i-1}^2}F_i'+\dfrac{3}{q_{i-1}^2}F_i''\right)$ $-\dfrac{1}{\Delta x}e^{\frac{-p_{i-1}}{2\cdot}\Delta x}\cdot\left(y_{i-1}-\dfrac{F_{i-1}}{q_{i-1}}-\dfrac{p_{i-1}}{q_{i-1}^2}\dfrac{F_i-F_{i-1}}{\Delta x}+\dfrac{3}{q_{i-1}^2}F_i''\right)-\dfrac{F_i'}{q_{i-1}}-\dfrac{p_{i-1}}{q_{i-1}^2}F_i''$

№	Условие	l_i^-
2	$q = p = 0$	$l_i^- = \frac{1}{\Delta x}\left(y_i - y_{i-1}\right) - \frac{-F_{i+1} + 10F_i + 3F_{i-1}}{24}\cdot\Delta x$
3	$q = 0$ $p \neq 0$	$l_i^- = \left(y_i - y_{i-1} + \frac{5F_{i-1} + 8F_i - F_{i+1}}{12p_{i-1}}\cdot\Delta x - \frac{F_i - F_{i-1}}{p_{i-1}^2} + \frac{F_i'}{p_{i-1}^3}\cdot\Delta x\right)\times$ $\times\frac{p_{i-1}}{e^{p_{i-1}\cdot\Delta x} - 1} - \frac{F_i}{p_{i-1}} + \frac{F_i'}{p_{i-1}^2} - \frac{F_i''}{p_{i-1}^3}$
4	$q > \frac{-p^2}{4\cdot k}$	$l_i^- = \left[\left(y_{i-1} - \frac{F_{i-1}}{q_{i-1}} + \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}^2}\frac{3F_{i-1} - 4F_i + F_{i+1}}{2\Delta x} - F_i''\frac{p_{i-1}^2 + q_{i-1}}{q_{i-1}^3}\right)\left(\lambda_2^{(i-1)} - \lambda_1^{(i-1)}\right) +\right.$ $\left.+\left(y_i - \frac{F_i}{q_{i-1}} - \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}^2}F_i' - F_i''\frac{p_{i-1}^2 + q_{i-1}}{q_{i-1}^3}\right)\left(\lambda_1^{(i-1)}e^{-\lambda_2^{(i-1)}\cdot\Delta x} - \lambda_2^{(i-1)}e^{-\lambda_1^{(i-1)}\cdot\Delta x}\right)\right]\div$ $\div\left(e^{-\lambda_2^{(i-1)}\cdot\Delta x} - e^{-\lambda_1^{(i-1)}\cdot\Delta x}\right) + \frac{F_i'}{q_{i-1}} + \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}^2}F_i''$, где $\lambda_{1,2}^{(i)} = -\frac{p_i}{2} \pm \sqrt{\frac{p_i^2}{2} + q_i}$
5	$q < \frac{-p^2}{4\cdot k}$	$l_i^- = \left(\alpha_{i-1}\cdot ctg\left(\alpha_{i-1}\cdot\Delta x\right) - \frac{p_{i-1}}{2}\right)\cdot\left(y_{i-1} - \frac{F_{i-1}}{q_{i-1}} - \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}^2}\frac{F_i - F_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{F_i''}{q_{i-1}^2}\right) -$ $-\frac{\alpha_{i-1}}{\mathbf{sin}\left(\alpha_{i-1}\cdot\Delta x\right)}\cdot e^{-\frac{p_{i-1}}{2}\Delta x}\cdot\left(y_i - \frac{F_i}{q_{i-1}} - \frac{p_{i-1}F_i'}{q_{i-1}^2} - \frac{F_i''}{q_{i-1}^2}\right) - \frac{F_i'}{q_{i-1}} - \frac{p_{i-1}F_i''}{q_{i-1}^2}$, где $\alpha_i = \sqrt{-q_i - \frac{p_i^2}{2}}$

Для простоты считалось, что $K(x)=1$ – это не ограничивает общности, так как получается делением всех функций уравнения на $K(x)$. Кроме этого, обратите внимание, что F_i – значение функции в i–м узле сетки, а p_i и q_i –значения на i–м интервале.

Список литературы.

[1] Бахвалов Н.С. Численные методы. Т. 1 // Москва: Наука. 1973.

[2] Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем // Москва: Мир. 1983.

[3] Агафонцев С.В. Об одной модификации итерационно-интерполяционного метода // Сопряженные задачи механики и экологии: Избранные докл. междунар. конф. Томск: Изд-во ТГУ. 2000. С.5–28.