# ДИССИПАТИВНЫЕ АСИММЕТРИЧНЫЕ КОМПАКТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

В. И. Паасонен
*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия*
e-mail: viking@ict.nsc.ru

Предлагается модификация схемы четвертого порядка точности для уравнения колебаний, содержащая регулируемую аппроксимационную вязкость. В колебательном процессе она имеет смысл трения и достигается путем введения в компактную схему слабой асимметрии по времени, не снижающей порядка точности по пространственным переменным. Исследована устойчивость, сходимость и диссипативные свойства асимметричной схемы.

## Введение

В последнее время в связи с некоторым общим оживлением в области проектирования современных высокоточных приборов, основанных на колебательных явлениях, возродился интерес к разработке методов расчета уравнения колебаний, способных эффективно подавлять паразитные гармоники, ограничивая их рост на достаточно больших интервалах времени [5]. Идея состоит во включении в исходное уравнение колебаний дополнительного слагаемого, имеющего в колебательном процессе смысл трения [7]. Эта идея достаточно развита в отношении разностных схем традиционного второго порядка точности [2, 4], основанных на применении метода переменных направлений или стабилизирующей поправки [6].

С другой стороны, для уравнения колебаний существуют экономичные разностные схемы повышенного порядка точности [1], являющиеся обобщением компактной схемы Микеладзе [3] для уравнения Пуассона. Однако схема с погрешностью $O(\tau^4+h^4)$, наилучшая из них по точности, не является диссипативной вовсе, а аппроксимационная вязкость схем с более грубой погрешностью по временному шагу $O(\tau^r+h^4)(r=2,3)$ не является регулируемой, что ограничивает возможности расчета при сколько-нибудь продолжительном времени процесса, особенно при не самых гладких решениях.

Под влиянием этих двух обстоятельств возникла мысль усовершенствовать компактные схемы [1] с целью организации регулируемой аппроксимационной вязкости на основе идеи, аналогичной (не по форме, а по смыслу) изложенной в [7, 2, 4]. Формально предлагаемый здесь подход отличается от цитируемого в трех аспектах. Во-первых, для модифицированной компактной схемы используется не метод переменных направлений, а сохранен тип схемы приближенной факторизации, принятый в оригинале [1]. Эта форма дробных шагов наиболее удобна в случае схем повышенной точности, так как ошибка приближенной факторизации оператора лежит в пределах погрешности исходной схемы. Во-вторых, слагаемое, ответственное за трение, не вводится прямо в исходное уравнение колебаний как искусственный объект, а возникает автоматически в первом дифференциальном приближении схемы как следствие специально созданной слабой асимметрии схемы по времени. Наконец в-третьих, преимуществом полученной в результате схемы является сохранение повышенного порядка аппроксимации по пространственным переменным, что особенно важно в многомерном случае.

## 1. Компактные разностные схемы

В работе [1] для многомерного уравнения колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + f, \quad \Delta u = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_i}^2}, \tag{1.1}$$

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00–01–00899) и программы Интеграционных исследований СО РАН (проект № 1).

предложен ряд компактных схем, основанных на исходной разностной аппроксимации уравнения (1.1) с погрешностью $O(\tau^4 + h^4)$

$$A\frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} = \Omega u^n + Rf^n, \quad \Omega = \sum_{i=1}^{m} \Lambda_i \left( E + \sum_{j \neq i} \frac{h_j}{12} \Lambda_j \right), \tag{1.2}$$

где $\Lambda_i$ обычный разностный аналог двойного дифференцирования по $i$-ой переменной, а регуляризирующий оператор $A$ схемы (1.2) и оператор осреднения $R$ правой части по ближайшим точкам имеют вид

$$A = E + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i \Lambda_i, \quad \sigma_i = \frac{h_i^2 - \tau^2}{12},$$

$$Rf^n = f^n + \frac{f^{n+1} - 2f^n + f^{n-1}}{12} + \sum_{i=1}^{m} \frac{h_i^2}{12} \Lambda_i f^n.$$

Ясно, что оператор $A$ приближенно факторизуется в произведение одномерных трехточечных операторов:

$$A = \prod_{i=1}^{m} A_i + O(\tau^4 + h^4), \quad A_i = E + \sigma_i \Lambda_i,$$

причем факторизацию $A$ в схеме (1.2) можно осуществить различными способами.

Так, непосредственная факторизация дает симметричную по времени схему, эквивалентную исходной по порядку погрешности

$$\prod_{i=1}^{m} A_i \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} = \Omega u^n + Rf^n \tag{1.3}$$

с комплексными множителями возрастания гармоники, равными по модулю единице, т. е. не диссипативную схему.

Предварительное разбиение левой части схемы на два слагаемых с последующей факторизацией $A$ только на одном из них приводит к потере порядка погрешности схемы по $\tau$, но вместе с тем и к нарушению симметрии по времени, что при определенных условиях на число Куранта приводит к диссипативным асимметричным факторизованным схемам. Так например, предварительное представление аналога производной по времени в виде разности

$$\frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} = \frac{1}{\tau} \left( \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} - \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau} \right)$$

с факторизацией $A$ только на первом слагаемом даст асимметричную схему с погрешностью $O(\tau^3 + h^4)$

$$\prod A_i \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = A\frac{u^n - u^{n-1}}{\tau} + \tau(\Omega u^n + Rf^n).$$

Действуя аналогично и факторизуя оператор $A$ только на верхнем слое или на полусумме верхнего и нижнего слоев, получим схему второго порядка аппроксимации по времени. Заметим, что в этих примерах порядок аппроксимации по пространственным переменным остается четвертым.

## 2. Компактная схема с регулируемой диссипацией

Представленные выше асимметричные схемы хотя и являются диссипативными, но не позволяют регулировать вязкость. Для достижения такой возможности вместо исходной схемы (1.2) рассмотрим ее обобщение

$$A\frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} = \Omega_0 S u^n + \Omega_2 u^n + Rf^n, \tag{2.1}$$

где

$$\Omega_0 = \sum_{i=1}^{m} \Lambda_i, \quad \Omega_2 = \sum_{i=1}^{m} \Lambda_i \sum_{j \neq i} \frac{h_j}{12} \Lambda_j,$$

а $S$ оператор асимметричного осреднения по трем временны́м слоям

$$Su^n = bu^{n+1} + (1-a-b)u^n + au^{n-1}.$$

Таким образом, схема (2.1) отличается от (1.2) тем, что оператор $\Omega$, аппроксимирующий оператор Лапласа, разбит на слагаемые нулевого и второго порядка малости $\Omega = \Omega_0 + \Omega_2$, а затем асимметрия по времени с весами $a$ и $b$ вносится лишь в первое слагаемое. Ясно, что при независимости $a$ и $b$ от пространственных шагов порядок аппроксимации по пространству остается четвертым. Из тождества

$$Su^n = u^n + b\tau^2 \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} + (b-a)\tau \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau} \tag{2.2}$$

следует, что при условиях

$$b - a = \alpha\tau^{1+r}, \quad b = \beta\tau^r,$$

где $\alpha, \beta$ и $r$ некоторые постоянные, схемы (2.1) и (1.2) различаются величинами $O(\tau^{2+r})$. Следовательно погрешность модифицированной схема (2.1) равна $O(\tau^{2+r} + h^4)$. Действуя оператором $\Omega_0$ на слагаемые осредненного значения (2.2) по отдельности и приводя подобные, приведем схему (2.1) к канонической форме

$$B\frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} = \Omega u^n + \alpha\tau^{2+r}\Omega_0 \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau} + Rf^n, \tag{2.3}$$

где

$$B = E + \sum_{i=1}^{m} \delta_i \Lambda_i, \quad \delta_i = \sigma_i - \beta\tau^{2+r} = \frac{h_i^2 - \tau^2}{12} - \beta\tau^{2+r}.$$

Очевидно оператор $B$ можно подвергнуть приближенной факторизации. Не переписывая схему (2.3) снова, будем считать, что он уже факторизован

$$B = \prod_{i=1}^{m} B_i = \prod_{i=1}^{m} (E + \delta_i \Lambda_i).$$

Таким образом схема (2.3) отличается от симметричной схемы (1.3) наличием сил трения (второе слагаемое в правой части) и возмущенными коэффициентами регуляризатора $B$. Заметим, что данный подход, базирующийся на нарушении симметрии схемы, по существу аналогичен непосредственному включению в дифференциальное уравнение сил трения.

В схеме (2.3) три свободных регулирующих параметра. Параметр $\beta$ не нарушает симметрии схемы и поэтому не оказывает существенного влияния на диссипативные свойства схемы. В противоположность ему параметр $\alpha$ вносит асимметрию и, следовательно, является фактором, регулирующим диссипативные свойства схемы. Очевидно следует ожидать, что условие сильной устойчивости схемы состоит в положительности $\alpha$, так как в этом случае в комбинации $Su^n$ вес верхнего слоя $b$ превосходит вес нижнего слоя $a$. Параметр $r$ влияет на степень зависимости аппроксимационной вязкости от детальности шага по времени. Так, при $r = 0$ диссипация умеренна (коэффициент трения пропорционален $\tau^2$), а при $r = 1$ мала (коэффициент пропорционален $\tau^3$).

## 3. Исследование устойчивости схемы

Проведем гармонический анализ устойчивости для первой краевой задачи в многомерном параллелепипеде $(0 \le x_i \le \pi, i = 1, ...m)$. Дисперсионное соотношение для двухслойной схемы (2.3) запишем в виде

$$\rho^2 - p\rho + q = 0, \quad p = 2 + \frac{\tau^2\omega + \alpha\tau^{r+3}\omega_0}{\prod b_i}, \quad q = 1 + \alpha\tau^{r+3}\frac{\omega_0}{\prod b_i}, \tag{3.1}$$

где $\omega, \omega_0, b_i$ — собственные числа операторов $\Omega, \Omega_0, B_i$ соответственно. Очевидно, все они выражаются через собственные числа $\lambda_i = -4z_i/h_i^2, (z_i = \sin^2(k_i h_i/2))$ операторов $\Lambda_i$.

В уравнении (3.1) уже проведено почленное деление на собственное число оператора $B$, который предполагается положительным. Легко убедиться, что его положительность гарантируется неравенствами

$$2 + \kappa_i - 12\beta\kappa_i\tau^r > 0, \quad \kappa_i = \tau^2/h_i^2. \tag{3.2}$$

Неравенства (3.2) очевидно выполняются при малых $\tau$, если вязкость незначительна ($r > 0$). При умеренной вязкости ($r = 0$) они выполняются безусловно при ограничении $\beta \leq 1/12$, а без этого ограничения возникает условие на число Куранта

$$\kappa = \max(\kappa_i) < \frac{2}{12\beta - 1}.$$

Опуская громоздкие выкладки, наметим только ход анализа устойчивости и приведем конечный результат. Исследование сильно упрощают следующие две леммы [1].

**Лемма 1** (Критерий Гурвица). Корни уравнения (3.1) с вещественными коэффициентами $p$ и $q$ не превосходят по модулю единицы тогда и только тогда, когда одновременно выполняются два неравенства $|q| \leq 1$, $|p| \leq 1 + q$. Корни по модулю строго меньше единицы, если хотя бы одно из указанных неравенств строгое.

**Лемма 2**. Функция многих переменных, определенная в многомерном параллелепипеде и линейная по каждому из аргументов, принимает наибольшее и наименьшее значения в углах этого параллелепипеда.

Подстановка выражений для коэффициентов $p$ и $q$ в неравенства леммы 1 приводят после сокращений на положительные множители к неравенствам для функций, линейных по каждой из переменных $z_1, ...z_m$ в отдельности. Заменяя дискретные переменные $z_i = \sin^2(k_i h_i/2)$ непрерывными $0 < z_i < 1$, перейдем к неравенствам для функций непрерывных переменных, определенных в многомерном кубе. Воспользовавшись затем леммой 2, запишем неравенства в углах куба (с $k$ единичными и $m - k$ нулевыми значениями переменных, $k = 0, ..., m$). Решая их получим ограничения на размерность пространства ($m \leq 4$), на направление силы трения ($\alpha > 0$) и на число Куранта: $\kappa \leq 1$ при $m = 1$ и $\kappa \leq \dfrac{2}{2 + \sqrt{3}}$ при $m = 2, 3, 4$.

При этих условиях теорема сходимости в среднем с порядком $O(\tau^{2+r} + h^4)$, сформулированная в [1], с дословным повторением доказательства справедлива и для схемы (2.3).

# 4. Численное исследование схемы

В среде визуального программирования Delfi выполнена небольшая программа для одномерного случая с возможностью интерактивного варьирования параметров сетки и схемы. Исследовалось поведение суммы двух синусоидальных волн с различными полупериодами, соизмеримыми с $\pi$ (например, низкочастотной и высокочастотной), распространяющихся навстречу друг другу по характеристикам. Выводились графики точного и приближенного решения на конечный момент времени и ошибка в смысле максимума модуля по узлам сетки.

Как и предполагалось, изменение $\beta$ слабо влияло на результат, пока его значение удовлетворяло условиям (3.2) положительности оператора $B$. При их нарушении наблюдался рост ошибки, очень быстрый при отсутствии вязкости ($\alpha = 0$).

При слабой силе трения ($r = 1$) аппроксимационная вязкость оказывалась столь ничтожной, что в очень широком диапазоне изменения коэффициента $\alpha$ результат оставался визуально неизменным, и контроль ошибки в $C$-норме также не фиксировал различий. При умеренной силе трения ($r = 0$) с ростом коэффициента $\alpha$ от нуля ошибка сначала существенно уменьшалась, особенно при наличии высокочастотной составляющей в решении, а затем (при дальнейшем росте $\alpha$) росла. При всех расчетах в зависимости ошибки от коэффициента трения отмечалось наличие минимума.

Экспериментальное исследование порядка сходимости при $r = 0$ показало, что при крупном шаге $h$ уменьшение его вдвое с соответствующим уменьшением $\tau$ в четыре раза уменьшало ошибку приблизительно в шестнадцать раз, что подтверждает теоретически установленный порядок $O(\tau^2 + h^4)$. При дальнейшем измельчении шага эта закономерность ухудшалась, что очевидно вызвано влиянием ошибок округления. Косвенным подтверждением этого вывода является реакция на переход от типа *real* к типу *extendet*: порог аномалии в сходимости отодвинулся к меньшим значениям шага.

# Список литературы

[1] Валиуллин А. Н., Паасонен В. И. Экономичные разностные схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения колебаний // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1970. Т. 1, № 1. С. 17–30.

[2] Кожарская И. П.,Офицеров В. В., Петкун А. А. Расчет собственных полей релятивистских электронных пучков в электромагнитных моделях макрочастиц методом переменных направлений // Алгоритмы и методы расчета электронно-оптических систем. Новосибирск, Изд-во ВЦ СОАН СССР. 1983. С. 86–90.

[3] Микеладзе Ш. Е. О численном интегрировании уравнений эллиптического и параболического типов // Известия АН СССР. Сер. матем. 1941. Т. 5, № 1. С. 57–74.

[4] Офицеров В. В., Петкун А. А. К расчету собственных электромагнитных полей интенсивного электронного пучка // Труды радиотехнического института. Изд-во РИАН СССР, 1981. № 42. С. 162–166.

[5] Офицеров В. В. Применение диссипативных схем для решения нестационарных краевых задач. Четвертый сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математики (ИНПРИМ-2000) // Тез. докл. Новосибирск: Изд-во Ин-та мат-ки СО РАН, 2000. С. 96–97.

[6] Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.

[7] Brettschneider M., Killen J., Mirin A. A. Numerical simulation of relativistic electrons confined in an axisymmetric mirror field // J. of Computational Physics. 1973. Vol. 11, No. 3. P. 360–399.