

ОПИСАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В СЛОЖНЫХ ТРУБОПРОВОДНЫХ СИСТЕМАХ МОДЕЛЯМИ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

А. А. АТАВИН

Институт водных и экологических проблем СО РАН, Новосибирск, Россия

В. В. ТАРАСЕВИЧ

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет, Россия

Рассматриваются нестационарные процессы в сложных трубопроводных системах. Приводится математическое описание задачи в рамках смешанной задачи для системы гиперболических уравнений, определенных на комплексе. Предлагается методика построения “быстрых” упрощенных моделей, основанная на замене исходной системы с распределенными параметрами различными системами с сосредоточенными параметрами, что позволяет значительно снизить затраты вычислительных ресурсов. Приводятся результаты численных экспериментов по сопоставлению моделей.

Введение

Многие широко распространенные системы с распределенными параметрами (например, водопроводные сети, сети теплоснабжения и т. д.) содержат тысячи элементов и имеют весьма большие размеры. Расчет нестационарных процессов в таких системах требует значительных вычислительных ресурсов. Однако многие возникающие на практике задачи, например, задача оперативного управления, требуют быстрых вычислений и предсказания состояний системы в режиме реального времени. Хотя увеличение производительности вычислительной техники и усовершенствование вычислительных алгоритмов и приводит к уменьшению времени счета, но более перспективным представляется разработка “быстрых” (упрощенных) моделей. Один из путей их создания состоит в замене исходных систем с распределенными параметрами на системы с сосредоточенными параметрами. При этом требуется подобрать характеристики новой системы так, чтобы параметры протекающих в ней процессов были как можно ближе к параметрам аналогичных процессов в исходной системе.

1. Математическая постановка задачи

Трубопроводная система представляет собой совокупность узлов и соединяющих их труб. В узлах (точках стыка труб) могут быть расположены насосы, задвижки, клапаны и другая гидроарматура. Структуру такой трубопроводной системы можно изобразить в виде некоторого ориентированного графа Γ , вершины которого (множество T) соответствуют узлам системы, а дуги — трубам системы (множество дуг C), причем ориентация дуг определяет положительное направление потока.

1.1. Смешанная задача, определенная на одномерном комплексе

Пусть k — номер дуги (нижний индекс) и j — номер вершины (верхний индекс). Будем считать, что для каждой дуги k задана ее длина L_k и определена координата x (в соответствии с ориентацией дуги). Модифицированный таким образом граф Γ можно рассматривать как обобщение оси x [1, 2].

Нестационарные течения в трубопроводах системы описываются уравнениями гидравлического удара [1, 2]:

$$\frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} + \frac{\partial (A_k \vec{u}_k)}{\partial x} = \vec{f}_k. \quad (1)$$

Здесь матрица A_k и вектор f_k , вообще говоря, зависят от вектора параметров потока $\vec{u}(x, t)$, координаты x и времени t :

$$A_k = \begin{pmatrix} Q_k/\omega_k & \rho a_k^2/\omega_k \\ \omega_k/\rho & Q_k/\omega_k \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ g\omega_k i_k - \lambda_k |Q_k| Q_k / 2d_k \omega_k \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где d , ω и i — диаметр, площадь поперечного сечения и уклон трубопровода; λ — коэффициент гидравлического трения; ρ — плотность жидкости; a — скорость распространения волны гидравлического удара.

Обозначим через \vec{u}^j вектор, составленный из параметров всех входящих в узел и выходящих из узла j потоков:

$$\vec{u}^j = \vec{u}_{k_1}^j \oplus \vec{u}_{k_2}^j \oplus \dots \oplus \vec{u}_{k_m}^j, \quad (3)$$

где

$$\vec{u}_k^j = \begin{cases} F_k^j(\vec{u}_{k,0}), & \text{если } k\text{-ая труба выходит из узла } j; \\ F_k^j(\vec{u}_{k,L}), & \text{если } k\text{-ая труба входит в узел } j. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $\vec{u}_{k,0} = \vec{u}_k(0, t)$, $\vec{u}_{k,L} = \vec{u}_k(L, t)$, а k_1, k_2, \dots, k_m — номера труб, примыкающих к узлу j .

Каждый узел j моделируется системой с сосредоточенными параметрами. Функционирование узла описывается уравнениями вида

$$\vec{H}^j(\vec{u}^j, \vec{\Lambda}^j, \vec{Z}^j, t) = 0, \quad (5)$$

где оператор \vec{H}^j представляет собой систему обыкновенных дифференциальных и/или алгебраических уравнений. Более подробная градация условий (5) представлена в [2]. Для однозначного решения задачи задаются еще начальные данные (при $t = 0$):

$$\vec{u}_k(x, 0) = \vec{u}_{0,k}(x), \quad \vec{\Lambda}^j(0) = \vec{\Lambda}_0^j, \quad \vec{Z}^j(0) = \vec{Z}_0^j. \quad (6)$$

Таким образом, задача моделирования нестационарных процессов в рассматриваемых системах на основе модели с распределенными параметрами сводится к решению начально-краевой задачи, определенной на графе, т.е. системы дифференциальных уравнений в частных производных (1) с граничными условиями (5) и начальными данными (6).

1.2. Процедура осреднения

Построение “быстрой” модели основано на замене исходной системы с распределенными параметрами C на систему с сосредоточенными параметрами C' . При этом вектор распределенных параметров \vec{u} заменяется на некоторый вектор сосредоточенных параметров \vec{u}^* , а вместо (1) используется система обыкновенных дифференциальных уравнений.

Один из путей получения системы с сосредоточенными параметрами, предложенный в [2], состоит в осреднении (1) по физическим процессам или пространственным переменным с применением классических квадратурных формул.

В настоящем разделе рассматривается подход, основанный на осреднении (1) по пространственной переменной x на всем протяжении дуги графа Γ на основе неклассических квадратурных формул [3]. А именно, пусть некоторая величина $b = b(x)$ определена на интервале $[0, L]$, и b_0, b_L, b'_0, b'_L — значения $b(x)$ и ее производной на границах интервала. Тогда имеет место следующая формула, обобщающая формулу трапеций:

$$\frac{1}{L} \int_0^L b(x) dx \approx \frac{b_0 + b_L}{2} + \frac{L}{12} (b'_0 - b'_L). \quad (7)$$

Теперь, интегрируя уравнения (1) по x , получаем

$$\frac{d\vec{u}_k^*}{dt} + \frac{A_{k,L}\vec{u}_{k,L} - A_{k,0}\vec{u}_{k,0}}{L_k} = \vec{f}_k^*, \quad (8)$$

где

$$\vec{u}_k^*(t) = \frac{1}{L_k} \int_0^{L_k} \vec{u}_k(x, t) dx, \quad \vec{f}_k^*(t) = \frac{1}{L_k} \int_0^{L_k} \vec{f}_k(\vec{u}_k(x, t), x, t) dx. \quad (9)$$

Применяя формулу (7) к (9) и выражая $\partial \vec{u} / \partial x$ из уравнения (1) через \vec{u} и $\partial \vec{u} / \partial t$, получаем (индекс k для простоты опущен):

$$\begin{aligned} & \frac{L}{12} \frac{d}{dt} (K_L \frac{d\vec{u}_L}{dt}) - \frac{L}{12} \frac{d}{dt} (K_0 \frac{d\vec{u}_0}{dt}) + (\frac{E}{2} + \frac{L}{12} B_0) \frac{d\vec{u}_0}{dt} + \\ & + (\frac{E}{2} - \frac{L}{12} B_L) \frac{d\vec{u}_L}{dt} + \frac{A_L \vec{u}_L - A_0 \vec{u}_0}{L} = \frac{\vec{f}_0 + \vec{f}_L}{2} + \frac{L}{12} (\vec{h}_L - \vec{h}_0), \end{aligned} \quad (10)$$

где E — единичная матрица; матрицы $K = K(\vec{u}, x, t)$, $B = B(\vec{u}, x, t)$ и вектор $\vec{h} = \vec{h}(\vec{u}, x, t)$ — известные функции своих аргументов. Здесь $K = (A + D)^{-1}$, при этом компоненты матрица D :

$$d_{i,j} = \sum_m u_m \partial a_{i,m} / \partial u_j. \quad (11)$$

Учитывая соотношения (3)–(4), уравнения (10) совместно с граничными условиями (5) дают систему 2-го порядка относительно переменных \vec{u}^j , состоящую из обыкновенных дифференциальных уравнений и алгебраических уравнений. Таким образом, операция осреднения (7)–(9) позволяет исключить распределенные параметры для дуг и получить модель только относительно сосредоточенных параметров \vec{u}^j в узлах, но при этом повышается порядок системы уравнений. В этом случае вместо системы дифференциальных уравнений в частных производных (1) нужно будет решать систему (5), (10), что значительно ускоряет процесс решения. Если в правой части (7) отбросить второе слагаемое, получается классическая формула трапеций. Воспользовавшись ею, можно получить более простую модель с сосредоточенными параметрами (система уравнений 1-го порядка, совпадающая с одной из рассмотренных в [3]).

1.3. Осреднение по физическим процессам

В работе [3] предложен подход, основанный на осреднении уравнений (1) по физическим процессам. На рис. 1 представлена схема моделирования для одиночного трубопровода. Трубопровод разбивается на N участков, и в центре каждого участка условно размещается некоторая емкость, давление в которой \tilde{p} , “ответственная” за упругие свойства своего участка. На самом участке учитываются только инерционные характеристики потока (типа уравнения Бернулли с инерционным членом). Таким образом, течение в трубопроводе будет описываться системой уравнений

$$\frac{\rho \Delta}{2\omega} \frac{dQ_l}{dt} = p_l - \tilde{p}_0 + \rho g(z_l - z_0) - \lambda_l \frac{\Delta}{2d} \frac{\rho |Q_l| Q_l}{2\omega^2}, \quad (12)$$

$$\frac{\rho \Delta}{2\omega} \frac{dQ_r}{dt} = \tilde{p}_N - p_r + \rho g(z_N - z_r) - \lambda_r \frac{\Delta}{2d} \frac{\rho |Q_r| Q_r}{2\omega^2}, \quad (13)$$

$$\frac{\rho \Delta}{2\omega} \frac{dQ_k}{dt} = \tilde{p}_k - \tilde{p}_{k-1} + \rho g(z_k - z_{k-1}) - \lambda_k \frac{\Delta}{2d} \frac{\rho |Q_k| Q_k}{2\omega^2}, \quad (14)$$

при $k = 1, \dots, N - 1$;

$$\frac{\Delta \omega}{\rho a^2} \frac{d\tilde{p}_k}{dt} = Q_{k+1} - Q_k, \quad \text{при } k = 0, \dots, N - 1. \quad (15)$$

Здесь $D = L/N$, $Q_k = Q_k(t)$ — расход в начале k -го участка, $Q_{k+1} = Q_{k+1}(t)$ — расход в конце k -го участка, где $k = 0, \dots, N - 1$; $z_l = z_0, z_1, \dots, z_N = z_r$ — вертикальные отметки.

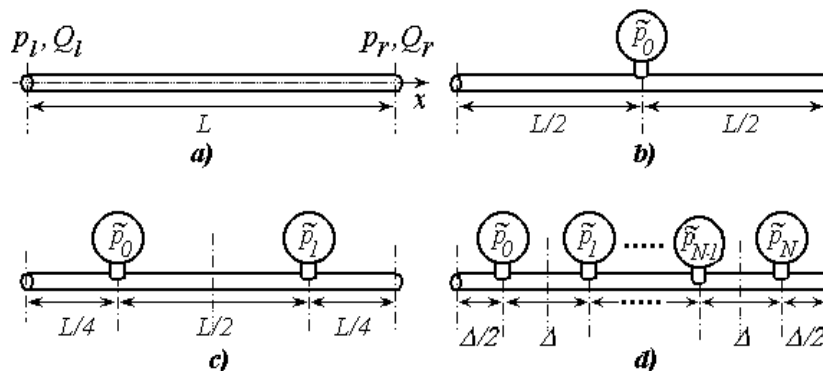


Рис. 1. Схема моделирования трубопровода системой с сосредоточенными параметрами. а) — Моделируемый трубопровод; б) $N = 1$; в) $N = 2$; д) общий случай. Здесь p_l , Q_l , p_r , Q_r — давление и расход на левой и на правой оконечностях трубопровода.

Очевидно, что система уравнений (12)–(15) является дискретной аппроксимацией уравнений (1)–(2) (аналог метода прямых).

2. Примеры расчета

2.1. Простой трубопровод

Рассмотрим сначала одиночный трубопровод, на левом конце которого ($x = 0$) расположен насос, создающий начальное давление p_0 , а на правом конце ($x = L$) закрывается задвижка в течение некоторого времени t_c , вследствие чего в системе начинается нестационарный процесс, интенсивность которого обратно пропорциональна времени закрытия задвижки t_c . Наиболее интенсивный процесс будет при $t_c < 2L/a$ (т.н. прямой гидравлический удар). На рис. 2 представлены результаты расчета прямого гидравлического удара для линейного закона закрытия при практически мгновенном закрытии задвижки (высокоинтенсивный гидравлический удар).

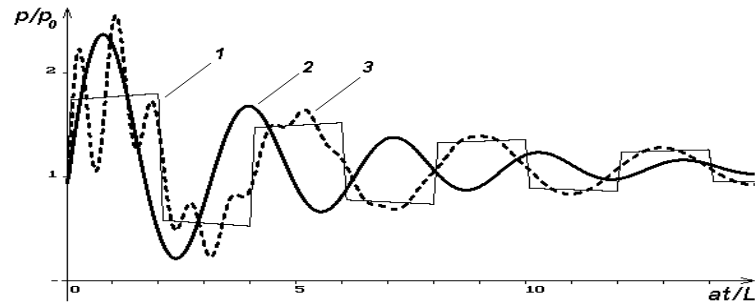


Рис. 2. Давление у задвижки при $t_c = 0,1L/a$: 1 — модель с распределенными параметрами (1), (2); 2 — модель 1-го порядка; 3 — модель 2-го порядка (10).

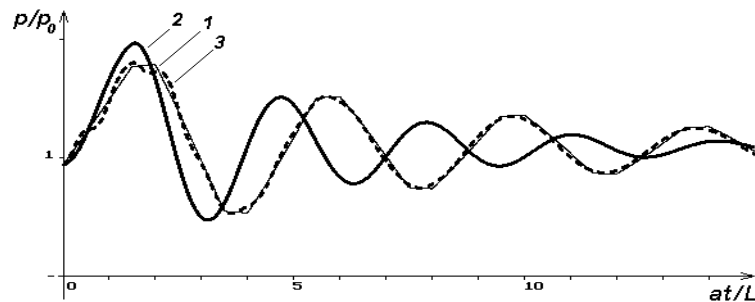


Рис. 3. Давление у задвижки при $t_c = 1,5L/a$: 1 — модель с распределенными параметрами (1), (2); 2 — модель 1-го порядка; 3 — модель 2-го порядка (10).

На рис. 3 представлены результаты расчета прямого гидравлического удара меньшей интенсивности.

Сопоставление решения системы уравнений (1), (2), т.е. по “точной” модели на основе системы с распределенными параметрами (кривая 1), с результатами решения нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (10) 2-го порядка (кривая 3) и 1-го порядка (кривая 2), т.е. по моделям систем с сосредоточенными параметрами, показало, что для высокоинтенсивных процессов с наличием значительной высокочастотной составляющей модели с сосредоточенными параметрами дают значительную погрешность по амплитуде, при этом модель 1-го порядка имеет значительное расхождение и по частоте.

Модель 2-го порядка имеет хорошую степень согласования по частоте и лучшее совпадение в среднем с амплитудой колебаний (при наличии значительных осцилляций).

Однако по мере снижения интенсивности процесса (при ослаблении его высокочастотной составляющей) степень совпадения быстро нарастает, и даже для прямого гидравлического удара меньшей интенсивности обе модели дают приемлемое согласование по амплитуде, а модель 2-го порядка дает почти совпадающий с “точным” решением результат.

Для еще менее интенсивных процессов (например, непрямого гидравлического удара, $t_c > 2L/a$) результаты расчетов по модели с распределенными параметрами и по модели 2-го порядка с сосредоточенными параметрами практически совпадают.

На рис. 4–5 показаны результаты расчета гидравлического удара в простом трубопроводе по модели (12)–(15).

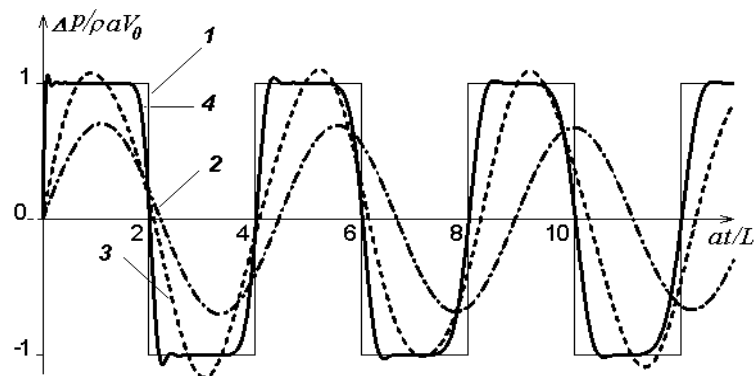


Рис. 4. Давление у задвижки (мгновенное закрытие): 1 — “точное” решение (модель с распределенными параметрами (1)–(2)); 2 — модель (12)–(15) с $N = 1$; 3 — модель (12)–(15) с $N = 2$; 4 — модель (12)–(15) с $N = 20$.

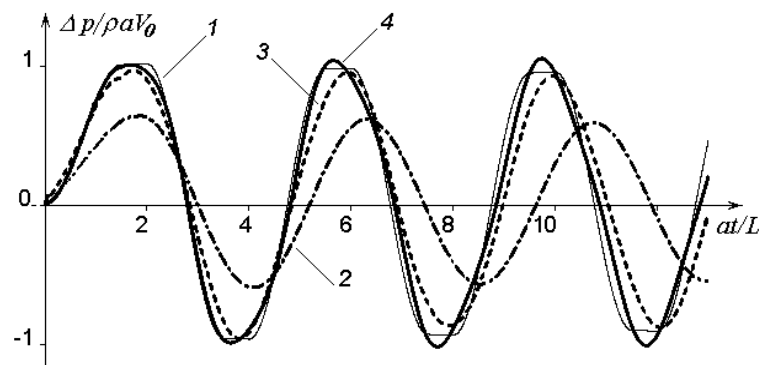


Рис. 5. Давление у задвижки (плавное закрытие): 1 — “точное” решение (модель с распределенными параметрами (1)–(2)); 2 — модель (12)–(15) с $N = 1$; 3 — модель (12)–(15) с $N = 2$; 4 — модель (12)–(15) с $N = 20$.

Результаты расчетов показывают, что уже при $N = 2$ имеется хорошее согласование по частоте и по амплитуде (в среднем), т. е. модель типа (12)–(15) с 7 сосредоточенными параметрами уже достаточно точно описывает нестационарный процесс с резкими градиентами; при снижении интенсивности процесса степень согласования увеличивается, как это видно из рис. 5. Из рисунков 4–5 видно также, что с ростом N решение по модели с сосредоточенными параметрами становится все более точным.

2.2. Трубопроводная система

Для больших трубопроводных систем следует ожидать быстрой диссипации высокочастотной составляющей и выполаживания фронта возмущения за счет интерференции и дисперсии волн во внутренних узлах. Поэтому применение моделей на основе систем с сосредоточенными параметрами в этом случае является оправданным.

Указанная методика была применена для расчета нестационарных процессов в системе технологических трубопроводов АЭС (около 2000 труб). Результаты расчета представлены на рис. 6 и полностью подтверждают сказанное выше.

3. Заключение

Представленный подход позволяет создавать упрощенные (“быстрые”) модели систем с распределенными параметрами, при этом исходные системы дифференциальных уравнений в частных производных заменяются на системы обыкновенных дифференциальных уравнений, что позволяет значительно сократить

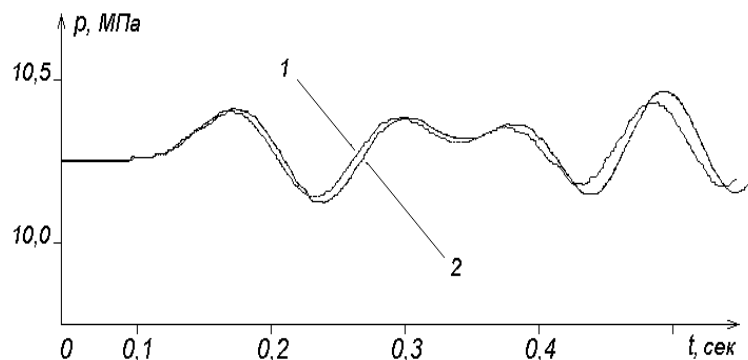


Рис. 6. Нестационарный процесс в системе технологических трубопроводов АЭС. 1 — расчет по точной модели (система с распределенными параметрами); 2 — расчет по упрощенной модели (система с сосредоточенными параметрами).

время вычислений. Проведенные расчеты на тестовых задачах и реальных системах выявили степень погрешности при такой замене и показали, что для достаточно плавно протекающих процессов такая замена практически равноценна.

Список литературы

- [1] Воеводин А. Ф., Шугрин С. М. Методы решения одномерных эволюционных систем. Новосибирск: ВО Наука, 1993. 368 с.
- [2] Гидравлические цепи. Развитие теории и приложения / Новицкий Н. Н., Сеннова Е. В., Сухарев М. Г. и др. Новосибирск: Наука, Сибирская издательская фирма РАН, 2000. 273 с.
- [3] Трубопроводные системы энергетики: модели, приложения, информационные технологии / Атавин А. А., Карасевич А. М., Сухарев М. Г. и др. Под общей ред. М. Г. Сухарева М.: ГУП Издательство "Нефть и газ" РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина, 2000. 320 с.